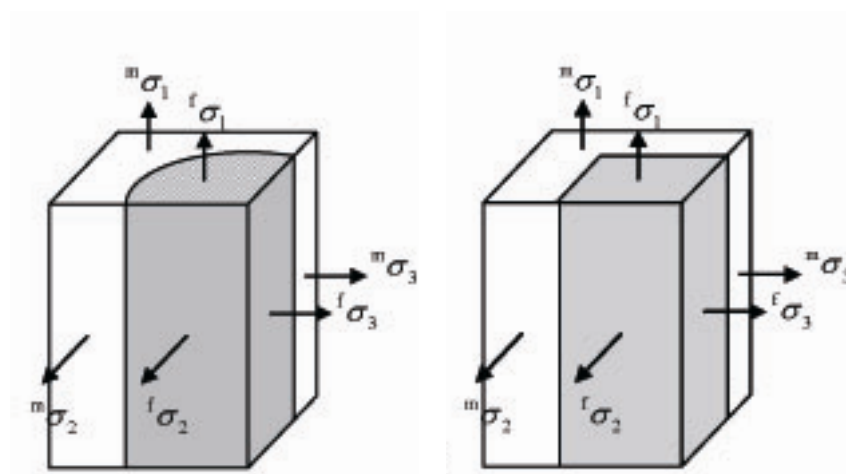


# Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos

F. Rastellini  
S. Oller  
E. Oñate



# **Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos**

F. Rastellini  
S. Oller  
E. Oñate

**Monografía CIMNE Nº-100, Enero 2007**



**CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA**  
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.upc.es](http://www.cimne.upc.es)

Primera edición: Enero 2007

**Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos**  
Monografía CIMNE M100  
© Los autores

ISBN: 978-84-96-736-10-8

Depósito legal: B.....

## **AGRADECIMIENTOS**

Queremos agradecer el apoyo económico recibido por parte del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte a través de la beca FPU para F. Rastellini, y por parte de la Comunidad Económica Europea a través de la participación del grupo investigador en el proyecto Growth "Compass". Agradecemos a la Dra. María Pía Cavatorta y al Prof. Giovanni Belingardi (Politécnico di Torino), y a Christian Hoffman (del Instituto de Estática y Dinámica en Stuttgart), quienes han realizado los resultados experimentales empleados en las aplicaciones del presente trabajo.

También queremos agradecer la ayuda recibida del Ministerio de Fomento de España (Secretaría de Estado de Infraestructuras) en el proyecto "Metodología para la Simulación Numérica del Comportamiento de Estructuras de Hormigón Armado Reparadas y/o Reforzadas con Materiales Compuestos", y de la Comisión Ministerio de Ciencia y Tecnología. Secretaría de Estado de Política Científica y Tecnológica Dirección General de Investigación de España en el proyecto "Delaminación de Compuestos de Matriz Reforzada" (DELCOMAR - MAT2003-09768-C03-02.).

Queremos también hacer presente nuestra gratitud a los profesores Miguel Cervera, Michele Chiumenti y Carlos Agelet del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería (ETSECCPB - UPC), por la valiosa ayuda brindada en relación al programa de elementos finitos COMET donde ha sido desarrollado el trabajo que aquí se presenta.



## ABSTRACT

*The mechanical response of a composite material depends on the behaviour of the component materials and their micro-structure.*

*In order to improve and to optimize the design of structural parts made of composite materials, the industry requires IT tools capable of reproducing the behaviour of these materials in an appropriate way, even in the nonlinear region. Therefore, it is very important the research and development of good numerical models for composites that could take into account the morphology (or structure) of the material, in a suitable and efficient way. Besides, it is necessary to have a specific graphical interface for this kind of problem that makes easy the program data input and later helps the visualization of specific results.*

The major aim of this work is the development, formulation and computational implementation, of a numerical model to assess the constitutive nonlinearity of laminates reinforced with fibres, in the context of the mechanics of continuous media. This formulation aims to combine (or to compose) the behaviours of simple materials (homogenous), with the purpose of obtaining the mechanical response of the composite material (heterogeneous). Therefore, it is proposed a suitable management of the already-developed constitutive models of the component materials (homogenous). By this way, all the knowledge acquired and the great development obtained in the field of the constitutive modelling of simple materials is made profitable for heterogeneous materials. The model allows the transference of all this technology to the field of the composites.

Considering the internal structure of the composite material, a novel strategy is developed to get the interaction and coupling between the component phases. This methodology, named here “compounding of behaviours”, allows to consider many local degradation phenomena that take place in the component materials, such as plasticity, damage, fatigue, aging, creep, etc., in a coupling way, which is also novel in this kind of approach. The applications of the present work are focused in the first three mentioned phenomena, since their combination allows reproducing the behaviour of many composite materials employed in the industry.

The solving algorithm for the proposed model is developed to be implemented as a constitutive model in a FEM code. It achieves quadratic convergence for both local and global non-linear problems. Consequently, it provides speed and accuracy to the analysis of composite structures in many engineering applications.

The simulation of the laminate is obtained by combining the proposed model with a lamination theory applied to each integration point. Isoparametric, 3D solid elements are used to discretize thick laminated structures; whereas to study thin laminated structures, a composite laminated shell element is developed on the base of a simpler shell element (*Discrete Kirchhoff Triangle*).

The validation of the model shows the fulfilment of the close equations (stress equilibrium and strain compatibility between components), not only in the direction of fibres (parallel behaviour) but also in orthogonal directions (serial behaviour). In addition, different lamina/laminate failure envelopes are generated with the proposed model, which are compared with other global failure criteria and experimental results available in the Literature.

The applicability of the model is confirmed via numerical simulations performed on relative complex geometries to model the mechanical response of industrial composite parts. The numerical results compared with experiments show the capability of the proposed model to describe the non-linear behaviour of fibre-reinforced laminates subjected to multiaxial loading, either static or cyclical.

## RESUMEN

*La respuesta mecánica de los materiales compuestos depende del comportamiento de los materiales componentes y de su micro-estructura.*

*Para mejorar y optimizar el diseño de piezas estructurales de materiales compuestos, la industria requiere herramientas informáticas que reproduzcan de manera apropiada el comportamiento de estos materiales incluso en el rango no lineal. Por tanto, es muy importante la investigación y desarrollo de modelos numéricos para compuestos que tengan en cuenta la morfología o estructura del material de forma adecuada y eficiente, además de ser necesario contar con un entorno gráfico específico para este tipo de problemas que facilite la entrada de datos al código de cálculo y posteriormente permita visualizar los resultados deseados.*

El objetivo principal del presente trabajo es el desarrollo, formulación e implementación computacional, de un modelo numérico para el tratamiento de la no linealidad constitutiva de laminados reforzados con fibras, en el contexto de la mecánica de los medios continuos. Esta formulación plantea combinar (o componer) los comportamientos de materiales simples (homogéneos) con el objetivo de obtener la respuesta mecánica del material compuesto (heterogéneo). Para ello, propone una gestión adecuada de los modelos constitutivos (homogéneos), actualmente disponibles, de cada uno de los materiales componentes; aprovechándose de esta manera el gran desarrollo conseguido en el campo de la modelización constitutiva de materiales simples, y permitiendo la transferencia de toda esta tecnología al campo de los materiales compuestos. Teniendo en cuenta la estructura interna del material compuesto, se desarrolla una estrategia de desacoplamiento e interacción de estas fases; de una manera novedosa. Esta metodología, denominada “composición de comportamientos”, permite tener en cuenta muchos fenómenos locales de degradación que tienen lugar en las fases componentes, tales como plasticidad, daño, fatiga, envejecimiento, fluencia, etc., de una manera acoplada, lo cual también es novedoso en este tipo de enfoque. Las aplicaciones del presente trabajo se centran en los tres primeros fenómenos mencionados, dado que su combinación permite simular el comportamiento de una extensa variedad de materiales compuestos empleados en la industria.

Se desarrolla el algoritmo de resolución del modelo propuesto que permite conseguir convergencia cuadrática, tanto local como global, de los problemas no-lineales al ser implementado como modelo constitutivo en un código de elementos finitos, proveyendo rapidez y precisión al análisis de estructuras de materiales compuestos en muchas aplicaciones industriales.



La simulación del laminado se logra mediante la combinación del modelo propuesto con una teoría de laminado aplicada en cada punto de integración. Se emplean elementos 3D sólidos isoparamétricos para discretizar estructuras laminadas gruesas; mientras que para estudiar estructuras laminares de pequeño espesor, se desarrolla un elemento de lámina laminado en capas de material compuesto, sobre la base de un elemento de lámina más simple (*Discrete Kirchhoff Triangle*).

La validación del modelo muestra el cumplimiento de las ecuaciones de cierre (equilibrio de tensiones y compatibilidad de deformaciones entre componentes), tanto en la dirección de las fibras (comportamiento en paralelo) como en direcciones ortogonales (comportamiento en serie). Además, se ilustran diversas envolventes de fallo para lámina/laminados generadas con el modelo propuesto y se las compara con otros criterios de fallo global para compuestos y resultados experimentales disponibles en la literatura.

La aplicabilidad del modelo se demuestra mediante simulaciones numéricas realizadas sobre geometrías de mayor complejidad para modelar la respuesta mecánica de piezas industriales. Los resultados numéricos contrastados con los experimentales indican la capacidad del modelo propuesto para describir el comportamiento no-lineal de laminados reforzados con fibras en diferentes orientaciones sometidos a estados de carga multiaxial tanto estática como cíclica.

# ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS .....	i
ABSTRACT .....	iii
RESUMEN .....	v
ÍNDICE GENERAL .....	vii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xiii
ÍNDICE DE TABLAS.....	xix
1 INTRODUCCION.....	1
1.1 Motivación .....	1
1.1.1 Requerimiento de las industrias.....	1
1.1.2 Características de los modelos requeridos.....	2
1.1.3 Problema serie-paralelo .....	3
1.1.4 Antecedentes .....	3
1.1.5 Solución propuesta en el presente trabajo .....	4
1.2 Objetivo general .....	5
1.3 Objetivos específicos .....	5
1.4 Tareas científicas y Estructura del trabajo .....	6

1.5	Novedad científica .....	9
1.6	Difusión del trabajo.....	9
	Referencias.....	11
2	MECÁNICA DE LOS MATERIALES COMPONENTES.....	13
2.1	Mecánica del daño continuo .....	14
2.1.1	Fenomenología y micromecánica del daño .....	14
2.1.2	Modelos locales y no locales .....	15
2.1.3	Modelos de daño continuo.....	16
2.1.4	Daño unilateral .....	16
2.1.5	Acoplamiento del daño con viscosidad y con plasticidad .....	17
2.2	Modelo mecánico continuo para análisis de la fatiga .....	18
2.2.1	Marco teórico.....	19
2.2.2	Curvas de vida S-N .....	21
2.2.3	Función de reducción de la resistencia por fatiga .....	22
2.2.4	Estrategia de avance en el tiempo.....	22
2.3	Anisotropía- Mapeo de espacios .....	23
	Referencias.....	27
3	MECÁNICA DE LOS MATERIALES COMPUESTOS.....	31
3.1	Introducción .....	31
3.1.1	Fabricación de los materiales compuestos.....	32
3.1.2	Definición del Elemento de Volumen Representativo (RVE) .....	33
3.1.3	Micro, meso y macro escalas.....	33
3.1.4	El concepto de la homogeneidad equivalente.....	34
3.2	Simulación numérica de materiales compuestos.....	35
3.2.1	Diseño mecánico de estructuras de materiales compuestos .....	35
3.2.2	Simulación numérica .....	36
3.3	Modelos constitutivos para materiales compuestos .....	37
3.3.1	Métodos macro-mecánicos.....	37
3.3.2	Métodos micro-mecánicos.....	39
3.3.3	Métodos de homogeneización (o multi-escala).....	42
3.3.4	Cotas de las propiedades efectivas .....	44

3.3.5	Enfoques computacionales.....	44
3.4	Evolución de la teoría de mezclas .....	44
3.4.1	Teoría de mezclas clásica.....	44
3.4.2	Teoría de mezclas generalizada.....	45
3.4.3	Modelos serie-paralelo avanzados.....	46
3.5	Criterios de fallo en materiales compuestos.....	46
3.5.1	Criterios de fallo macro-mecánicos.....	47
3.5.2	Discusión sobre los criterios de fallo .....	49
3.5.3	Criterio de fallo empleado en este trabajo .....	49
	Referencias.....	51
4	MODELO CONSTITUTIVO PARA COMPUESTOS CON FIBRAS LARGAS.	
	Composición de modelos constitutivos. ....	63
4.1	Introducción .....	63
4.2	Notación y definiciones .....	64
4.3	Definición de las partes Serie y Paralela de tensores .....	66
4.4	Composición de modelos constitutivos .....	67
4.5	Ecuaciones de cierre para el modelo Básico Serie-Paralelo .....	68
4.6	Algoritmo de resolución del modelo BSP .....	69
4.7	Operador tangente del modelo BSP.....	77
4.8	Modelo Enriquecido Serie-Paralelo (ESP).....	81
4.9	Cálculo de los coeficientes $^f\gamma$ y $^m\gamma$ .....	85
4.10	Algoritmo de resolución del modelo ESP .....	88
	Referencias.....	91
5	IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA .....	93
5.1	Problemas no-lineales involucrados .....	93
5.1.1	Problema global: equilibrio de fuerzas.....	94
5.1.2	Problema local del material compuesto: equilibrio tensional entre componentes.....	96
5.1.3	Problema local en cada material componente: obtención de variables internas .....	98
5.2	Tratamiento numérico de los compuestos laminados .....	100
5.2.1	Discretización de la geometría según el tipo de estructuras.....	100

5.2.2	Elementos finitos compuestos laminados.....	100
5.2.3	Orientación del material.....	100
5.2.4	Laminado equivalente .....	102
5.3	Elemento sólido compuesto homogeneizado.....	105
5.4	Elemento lámina laminado .....	106
5.4.1	Análisis de estructuras laminadas .....	107
5.4.2	Teoría ESL empleada .....	108
	Referencias.....	113
6	VALIDACIÓN Y CALIBRACIÓN .....	117
6.1	Verificación del cumplimiento de las ecuaciones de cierre.....	118
6.1.1	Carga paralela .....	119
6.1.2	Carga transversal.....	120
6.1.3	Observación.....	122
6.2	Validaciones de rigidez .....	122
6.2.1	Rigidez vs. orientación de fibra.....	122
6.2.2	Rigidez longitudinal vs. fracción volumétrica de fibras.....	123
6.2.3	Rigidez transversal vs. fracción volumétrica de fibras .....	124
6.2.4	Rigidez a cortante en el plano vs. fracción volumétrica de fibras..	125
6.3	Validaciones de resistencia .....	127
6.3.1	Resistencia longitudinal a tracción vs. fracción volumétrica de fibras .....	127
6.3.2	Resistencia transversal vs. fracción volumétrica de fibras .....	129
6.3.3	Resistencia a cortante vs. fracción volumétrica de fibras .....	130
6.3.4	Resistencia última vs. orientación de fibras.....	131
6.4	Convergencia local y global.....	132
6.4.1	Descripción del ensayo .....	132
6.4.2	Resultados .....	133
6.4.3	Comentarios .....	136
6.5	Calibración para los materiales componentes.....	136
6.5.1	Calibración cuasi-estática .....	136
6.5.2	Proceso de calibración a fatiga .....	137
6.6	Ejemplo de calibración para materiales del “ejercicio de fallo” .....	138

6.6.1	Consideraciones preliminares .....	138
6.6.2	Parámetros de rigidez .....	139
6.6.3	Parámetros resistentes para la matriz.....	139
6.6.4	Parámetros resistentes para las fibras.....	139
6.6.5	Resumen de las propiedades calibradas .....	140
6.6.6	Observación.....	141
6.7	Envolventes de fallo .....	141
6.7.1	Envolvente de fallo para carga combinada longitudinal y tangencial .....	141
6.7.2	Envolvente de fallo para carga combinada transversal y tangencial .....	142
6.7.3	Envolventes de fallo para laminado GRP [90°/±30°/90°] .....	143
	Referencias.....	145
7	APLICACIONES.....	147
7.1	Tracción cuasi-estática y estimación de vida por fatiga.....	147
7.1.1	Descripción de la geometría y materiales de los especímenes.....	148
7.1.2	Simulación numérica con el modelo propuesto.....	149
7.1.3	Conclusiones .....	152
7.2	Carga cíclica creciente con daño en componentes.....	152
7.2.1	Descripción geométrica y condiciones de contorno .....	152
7.2.2	Descripción de materiales .....	153
7.2.3	Simulación numérica.....	153
7.2.4	Resultados obtenidos .....	154
7.2.5	Conclusiones .....	156
7.3	Lámina a 45 grados doblemente hendida. ....	158
7.3.1	Descripción geométrica y de material .....	158
7.3.2	Resultados obtenidos .....	159
7.4	Ejemplo de estructura de placas sándwich en “T” .....	163
7.4.1	Descripción geométrica y condiciones de contorno .....	164
7.4.2	Descripción de materiales .....	165
7.4.3	Simulación numérica.....	167
7.4.4	Resultados obtenidos .....	167

7.5	Tracción de espécimen Z (elementos lámina DKT laminado).....	172
7.5.1	Descripción geométrica y condiciones de contorno.....	172
7.5.2	Simulación numérica .....	173
7.5.3	Resultados obtenidos .....	174
7.6	Subsistema estructural: Unión de tubos. ....	176
7.6.1	Descripción de materiales .....	177
7.6.2	Descripción geométrica y condiciones de contorno.....	178
7.6.3	Simulación numérica .....	180
7.6.4	Resultados obtenidos .....	180
	Referencia .....	184
8	CONCLUSIONES.....	185
8.1	Conclusiones .....	185
8.2	Aportaciones científicas relevantes.....	188
8.3	Valor metodológico y científico.....	189
8.4	Valor práctico-ingenieril.....	190
8.5	Futuras líneas de investigación .....	191
	Referencias.....	194
	Apéndice: ELEMENTO LÁMINA DKT-CST .....	195
A.1	Marco teórico e implementación.....	195
A.1.1	Teoría estructural empleada .....	195
A.1.2	Descripción del elemento lámina.....	196
A.1.3	Elemento de placa DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) .....	198
A.1.4	Elemento de placa CST ( <i>Constant Stress Triangle</i> ).....	208
A.1.5	Matriz de rigidez elemental en coordenadas globales.....	209
	Referencias.....	210

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1 – Umbral de resistencia uniaxial para un material simbólico.....	20
2.2 – Representación esquemática del avance de cargas en el tiempo. "ai" indica la etapa de carga de seguimiento en el intervalo "i". "bi" indica la etapa de carga sobre la envolvente en el mismo intervalo.....	23
2.3 – Diagrama esquemático que muestra las relaciones entre los dominios elásticos del campo de tensiones y del de deformaciones, para los espacios isótropo ficticio y anisótropo real.....	25
3.1 – Laminado formado por el apilado de láminas simples. ....	32
4.1 – Diagrama de flujo del algoritmo de solución del modelo compuesto.....	74
4.2 – Tensiones normales en los componentes. Celdas 3D real y simplificada. ....	82
4.3 – Regiones de la sección transversal. Representación esquemática.....	87
4.4 – Valores estimados de gamma en función de la fracción volumétrica de fibra para diferentes relaciones de rigideces.....	90
5.1 – Esquema de resolución del problema global no-lineal con indicación del proceso iterativo interno del modelo para compuestos.....	96
5.2 – Esquema del método de Newton para la resolución del modelo para compuestos. ....	97
5.3 – Diagrama de flujo del modelo propuesto para compuestos unidireccionales. ....	98
5.4 – Ángulos de Euler para definir la orientación del material.....	101



5.5 – Esquematización de cambios de base: de global a “local de elemento”, y de “local de elemento” a “local de fibra”.....	102
5.6 – Ejemplo de laminado real y laminado equivalente para elementos sólidos homogeneizados.....	103
5.7 – Procedimiento para la obtención del estado tensional de un material compuesto laminado en un punto de integración de un elemento finito sólido.....	106
5.8 – Coordenadas para la integración de propiedades a través de las capas.....	109
5.9 – Distribución de las deformaciones y las tensiones normales en la dirección $x$ para un material homogéneo y un compuesto laminado.....	110
5.10 – Convenio de signos para tensiones y esfuerzos en una placa DKT multilaminada.....	110
6.1 – Curvas de tensiones paralelas [MPa] vs. deformaciones paralelas para el compuesto y los materiales componentes, bajo un proceso a deformación controlada de carga-descarga en la dirección paralela.....	120
6.2 – Curvas de tensión serie [MPa] vs. deformación serie para el material compuesto y sus constituyentes, sometidos a carga-descarga con deformación transversal controlada.....	121
6.3 – Curva de rigidez [MPa] vs. orientación de fibra para el compuesto.....	123
6.4 – Rigidez transversal relativa $E_2/E_M$ vs. fracción volumétrica de fibras $V_f$ . Comparación entre los resultados obtenidos con los modelos propuestos, datos experimentales, ROM inversa y ecuación de Halpin-Tsai.....	124
6.5 – Rigidez tangencial relativa $G_{12}/G_M$ versus fracción volumétrica de fibras $V_f$ . Comparación entre resultados experimentales, modelo ROM inverso, ecuación de Halpin-Tsai y resultados obtenidos con los modelos BSP y ESP.....	126
6.6 – Tensión última [MPa] en función de la fracción volumétrica de fibras para una lámina de vidrio-epoxi unidireccional sometida a carga paralela.....	128
6.7 – Tensión última [MPa] en función de la fracción volumétrica de fibras para una lámina de carbono-epoxi unidireccional, sometida a carga paralela....	129
6.8 – Resistencia última del compuesto [MPa] en función de la fracción volumétrica de fibras en una lámina unidireccional de carbono-epoxi, sometida a una carga transversal.....	130
6.9 – Curva de resistencia última [MPa] para una lámina unidireccional de carbono-epoxi, sometida a una carga aplicada en diferentes ángulos respecto la orientación de fibras.....	131

6.10 – Detalle de la resistencia última [MPa] de una lámina de carbono-epoxi, para ángulos <i>off-axis</i> pequeños. Comparación con fórmulas ampliamente utilizadas.....	132
6.11 – Curvas tensión-deformación para el compuesto y sus componentes. Ensayo de carga y descarga transversal.....	133
6.12 – Curvas tensión-deformación ‘paralelas’ para el compuesto y sus componentes bajo un estado de carga-descarga transversal.....	134
6.13 – Convergencia global para diferentes pasos de carga en el proceso de carga-descarga.....	134
6.14 – Convergencia local para iteración 1 del paso B ( $\varepsilon_P = 0.0235$ ) y para las iteraciones 1, 2 y 3 del paso D ( $\varepsilon_P = 0.036$ ). .....	136
6.15 – Envolvente de fallo biaxial para la lámina unidireccional vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada longitudinal y tangencial. ....	142
6.16 – Envolvente de fallo biaxial para una lámina unidireccional tipo vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada transversal y tangencial. Comparación entre los datos experimentales, la estimación de Puck y los resultados obtenidos con el modelo ESP. ....	142
6.17 – Disposición de las capas para un laminado $[90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ]$ de vidrio-epoxi LY556. ....	143
6.18 – Envolvente de fallo biaxial para un laminado $[90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ]$ de vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada longitudinal y tangencial. Comparación entre los datos experimentales, la estimación de Puck y los resultados obtenidos con el modelo ESP.....	143
6.19 – Envolvente de fallo biaxial para laminado $[90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ]$ de vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada longitudinal y transversal. Comparación entre datos experimentales, estimación de Puck y predicción modelo ESP.....	144
7.1 – Curva tensión-deformación para especímenes tipo 1 y 2.....	150
7.2 – Curva tensión-deformación para especímenes tipo 3.....	150
7.3 – Comportamiento a fatiga de los especímenes tipo 1. Resultados experimentales para niveles de carga de 440, 480 y 500 MPa. ....	151
7.4 – Comportamiento a fatiga de los especímenes tipo 1. Simulaciones numéricas para niveles de carga de 440, 480 y 500 MPa. ....	151
7.5 – Geometría y condiciones de contorno .....	153
7.6 – Función de carga-descarga aplicada a los desplazamientos. ....	154
7.7 – Curvas tensión-deformación del compuesto y de los componentes bajo carga cíclica. ....	155

7.8 – Curva tensión-deformación de la matriz sometida a ciclos de tracción y compresión. ....	156
7.9 – Curva tensión-deformación del compuesto sometido a ciclos de tracción y compresión. ....	157
7.10 – Malla de elementos finitos (un elemento 3D en el espesor) con detalles en configuración inicial (izquierda) y deformada x10 (derecha).....	158
7.11 – Desplazamientos X.....	160
7.12 – Desplazamientos Y.....	160
7.13 – Desplazamientos Z (vista frontal).....	160
7.14 – Desplazamientos Z (vista posterior).....	160
7.15 – Desplazamientos totales. ....	161
7.16 – Tensiones principales i.....	161
7.17 – Tensiones principales ii. ....	161
7.18 – Tensiones principales iii. ....	161
7.19 – Tensiones normales X. ....	162
7.20 – Tensiones normales Y. ....	162
7.21 – Tensiones normales Z. ....	162
7.22 – Tensiones tangenciales XY. ....	162
7.23 – Geometría de la estructura y condiciones de contorno. ....	163
7.24 – Composición esquemática de un sándwich. ....	164
7.25 – Detalle de la malla de elementos finitos utilizada.....	165
7.26 – Esquema de un núcleo tipo “nido de abeja”. ....	166
7.27 – Curva Fuerza-Desplazamiento para una longitud unitaria de probeta.....	167
7.28 – Desplazamientos totales en la configuración deformada.....	168
7.29 – Componente X de desplazamientos. ....	168
7.30 – Componente Y de desplazamientos. ....	168
7.31 – Componente Z de desplazamientos. ....	169
7.32 – Tensiones de Von Mises en la estructura.....	169
7.33 – Tensiones de componente X. ....	170
7.34 – Tensiones de componente Y. ....	170
7.35 – Tensiones de componente Z. ....	171
7.36 – Tensiones de comparación en láminas componentes del laminado.....	171

7.37 – Tensiones de comparación en materiales componentes de la lámina 0°. ...	172
7.38 – Descripción geométrica del espécimen Z.....	173
7.39 – Dirección local del material y malla de elementos lámina utilizada. ....	173
7.40 – Momentos flectores principales para el laminado [0,90]s.....	174
7.41 – Detalle de momentos flectores principales para el laminado [0,90]s.....	174
7.42 – Momentos flectores principales para el laminado [45,-45]s. ....	175
7.43 – Detalle de momentos flectores principales para el laminado [45,-45]s.....	175
7.44 – Momentos flectores principales para el laminado [0,90,45,-45]s. ....	175
7.45 – Detalle de momentos flectores principales para el laminado [0,90,45,-45]s. .....	176
7.46 – Subsistema de la estructura tubular del coche prototipo “Touareg” .....	176
7.47 – Aparejo de prueba. a) croquis inicial, b) diseño final.....	177
7.48 – Componentes principales del aparejo. ....	177
7.49 – Condiciones de contorno.....	179
7.50 – Detalle de la malla de elementos finitos utilizada para discretizar la unión de tubos. ....	179
7.51 – Probeta inicial y dañada. ....	180
7.52 – Parte sometida a compresión. Identificación de zonas dañadas. ....	181
7.53 – Vectores desplazamiento en la geometría inicial.....	181
7.54 – Curva fuerza-desplazamiento en la dirección “Y” de la unión de tubos. Comparación entre resultados experimentales y numérico considerando fibras iso-resistentes. ....	182
7.55 – Curva fuerza-desplazamiento en la dirección “Y” de la unión de tubos. Comparación entre resultados experimentales y numérico considerando fibras con resistencia de compresión disminuida para considerar el pandeo local.....	183



## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 – Criterio de fallo polinomial. Donde $\sigma_1^u$ , $\sigma_2^u$ y $\sigma_3^u$ son las resistencias normales en las direcciones 1, 2 y 3; y $\sigma_{23}^u$ , $\sigma_{13}^u$ y $\sigma_{12}^u$ son las resistencias a cortante en los planos 23, 13 y 12. ....	48
Tabla 5.1 – Datos correspondientes a un laminado híbrido real (simétrico de 28 capas).....	104
Tabla 5.2 – Datos característicos del laminado híbrido equivalente (simétrico de 8 capas).....	104
Tabla 5.3 – Datos característicos del laminado híbrido equivalente (simétrico de 12 capas) que incluye las capas exteriores del laminado real. ....	105
Tabla 6.1 – Propiedades mecánicas de los constituyentes utilizados para validar el modelo compuesto sometido a una carga paralela. ....	119
Tabla 6.2 – Propiedades mecánicas de los constituyentes seleccionados para verificar el modelo SP bajo carga transversal (comportamiento en serie). ...	120
Tabla 6.3 – Propiedades mecánicas de los constituyentes definidos para validar la rigidez.....	122
Tabla 6.4 – Propiedades mecánicas de fibra y matriz para validar la rigidez a cortante en el plano. ....	126
Tabla 6.5 – Propiedades mecánicas de los constituyentes de GRP.....	128
Tabla 6.6 – Propiedades mecánicas de los constituyentes de CFRP.....	128
Tabla 6.7 – Propiedades de los materiales considerados en el análisis de convergencia.....	133

Tabla 6.8 – Error residual relativo e iteraciones requeridas para la convergencia de los problemas local y global.....	135
Tabla 6.9 – Parámetros de rigidez adoptados para los materiales componentes de las láminas vidrio-epoxi LY556. ....	139
Tabla 6.10 – Propiedades de resistencia de la matriz en las láminas vidrio-epoxi LY556.....	139
Tabla 6.11 – Propiedades de resistencia de las fibras en una lámina vidrio-epoxi LY556.....	140
Tabla 6.12 – Propiedades calibradas de los componentes de la lámina vidrio-epoxi LY556.....	140
Tabla 7.1 – Propiedades mecánicas de los materiales facilitados por los fabricantes.....	148
Tabla 7.2 – Orientación y espesor de subcapas para cada tipo de espécimen.....	148
Tabla 7.3 – Resultados experimentales para cada tipo de espécimen. ....	149
Tabla 7.4 – Propiedades elásticas de los laminados obtenidas numéricamente. .	149
Tabla 7.5 – Propiedades mecánicas de los materiales modelados.....	153

# 1 INTRODUCCION

## 1.1 Motivación

### 1.1.1 Requerimiento de las industrias

La aplicación industrial de los materiales compuestos de fibras largas (LFC, *Long Fibre Composites*) ha crecido ampliamente en los últimos 40 años, debido principalmente a las excelentes propiedades mecánicas que presentan este tipo de materiales [1]. En el mismo período, un gran esfuerzo teórico se ha invertido en la modelización numérica de materiales compuestos y en el desarrollo de una base matemática para la descripción de sus complejas micro y macro mecánicas; produciéndose por tanto, una gran cantidad de literatura científica sobre modelos constitutivos para estos materiales.

Sin embargo, es notable que la credibilidad en las teorías de predicción de fallo y en los modelos constitutivos utilizados en el diseño de estructuras de material compuesto no vaya unida a la confianza en las propiedades estructurales de este tipo de materiales. Al respecto, cabe mencionar la afirmación de Hinton & Soden [2] sobre que los actuales códigos comerciales de diseño no son capaces de predecir la fuerza última de la estructura con exactitud, y que la práctica de diseño actual está basada principalmente en el método de “prueba y error”, empleando numerosas pruebas experimentales en muestras de laboratorio y elementos estructurales. Esta perspectiva ha comenzado a cambiar en la última



década debido a que la industria demanda actualmente métodos de cálculo más fiables para cubrir la necesidad acuciante de reducir continuamente los tiempos y el coste de traer nuevos componentes al mercado.

El diseño industrial de piezas estructurales realizadas con materiales compuestos requiere formulaciones teóricas y herramientas informáticas que modelen adecuadamente el comportamiento de estos materiales incluso en el rango no lineal. Principalmente, tiene importancia la no-linealidad constitutiva debida a fenómenos de degradación de los materiales componentes como la plasticidad, el daño y la fatiga; sin dejar de mencionar otros fenómenos como la fluencia en matrices epoxi o el cambio de propiedades elásticas originadas por factores medioambientales (rayos UV, humedad, temperatura).

### 1.1.2 Características de los modelos requeridos

Concretamente, las industrias que emplean materiales compuestos requieren modelos constitutivos que permitan realizar un análisis estructural realista con degradación de propiedades mecánicas y predicción de fallo, pero que, al mismo tiempo, sean fáciles de implementar eficientemente en un código FEM.

En la literatura y en muchos códigos FEM comerciales existe gran variedad de modelos constitutivos para materiales homogéneos que permiten abordar los fenómenos de degradación recientemente mencionados, pero hay carencia de modelos que permitan modelar la no-linealidad constitutiva de materiales heterogéneos. Por tanto, un modelo ideal para compuestos sería aquel que pudiera combinar modelos constitutivos (para materiales simples) ya existentes y, a la vez, considere la micro-estructura heterogénea. Tal modelo permitiría la transferencia de gran cantidad de tecnología FEM actualmente desarrollada para materiales homogéneos.

El desarrollo de un modelo constitutivo con las características antedichas no es una tarea simple puesto que un análisis realista de las piezas estructurales hechas de compuestos reforzados con fibra (FRP, *fiber reinforced plastic*) requiere tener en cuenta, en la micro- y macro-escala, las relaciones no-lineales de tensión-deformación de manera apropiada. La secuencia de laminación obliga a considerar el comportamiento de cada lamina por separado [3] pero incluso el modelar una sola lámina parece ser una tarea compleja dado que tienen que considerarse muchos fenómenos causantes de la degradación del material.

Tal como remarca Puck [4] [5] [6], en el análisis de laminados FRP, es esencial distinguir entre el fallo de la fibra y el fallo de la matriz, así como entre la degradación de la fibra y la degradación de la matriz. Esta distinción (entre la respuesta mecánica de fibra y matriz) no se realiza en aquellos modelos que

consideran el compuesto como un continuo equivalente y que por consiguiente emplean variables de estado y ecuaciones de gobierno que se refieren al material homogeneizado en su conjunto.

Además, según lo muestran Oller *et al.* [7] [8], el coste computacional de un enfoque completo a doble escala para un análisis no-lineal de grandes estructuras todavía no es asequible para los ordenadores comunes, aún con métodos de paralelización.

En el presente trabajo, se propone un modelo constitutivo para compuestos basado en la combinación de modelos constitutivos no lineales para materiales simples, y que considera que el fallo del compuesto sobreviene cuando falla cualquiera de sus materiales componentes; todo ello, sin recurrir a un análisis de doble escala, sino empleando un método enmarcado en los de campo promedio.

### 1.1.3 Problema serie-paralelo

La morfología del material compuesto, es decir, la micro-estructura formada por la fibra embebida en la matriz, determina la manera en que interactúan los materiales componentes, produciendo distintas respuestas a nivel del compuesto. Existen direcciones en las cuales las fases componentes se comportan como materiales en paralelo (dirección de orientación de las fibras) y otras direcciones en donde las fases actúan como materiales en serie (direcciones ortogonales a la orientación de las fibras). Además, estos comportamientos no son independientes entre sí, sino que están vinculados mediante las leyes constitutivas de los materiales componentes (suponiendo adherencia perfecta fibra-matriz). Por ejemplo, al cargar un material en una dirección, se produce una contracción en direcciones ortogonales conocida como efecto Poisson. Otros ejemplos son la plasticidad y el daño, dado que generalmente el flujo plástico y el daño tienen componentes en todas direcciones, y no únicamente en la dirección de carga.

Esta interacción existente entre los materiales componentes es lo que denominaremos **acoplamiento serie-paralelo** y su consideración constituye uno de los objetivos del presente trabajo.

### 1.1.4 Antecedentes

Con la intención de formular un método de análisis fiable y con un esfuerzo de cómputo razonable, varios modelos han aparecido en los años ochenta y noventa que adoptaban una solución basada en una abstracción de la microescala con un enfoque multi-material. La característica general de estos enfoques es que utilizan parámetros de estado asociados a cada una de las diferentes fases que constituyen

el compuesto evitando un análisis completo a doble escala. El objetivo de estos modelos es hacer el comportamiento del compuesto dependiente de las leyes constitutivas de los materiales componentes en función de sus fracciones volumétricas y de su distribución morfológica dentro del compuesto (se analizarán con más detalle en el capítulo 3).

Los métodos de campo promedio (*mean field methods*) asumen que los valores promedios de la tensión y de la deformación son representativos del comportamiento de cada fase. También asumen que la tensión y la deformación promedio en las fases están relacionadas con la tensión y la deformación efectivas (en el compuesto) mediante ciertas funciones de influencia mecánicas llamadas “tensores de concentración”. Estas funciones dependen de la forma (partículas, fibras largas o cortas), de la distribución espacial y de la fracción volumétrica del refuerzo.

El uso de los métodos de campo promedio para calcular las constantes elásticas de materiales compuestos se puede remontar a Voigt [9] y a Reuss [10], quienes asumieron que los campos de tensión y de deformación eran, respectivamente, constantes en todas las fases. Desarrollaron fórmulas simples llamadas actualmente la regla de mezclas (ROM, *Rule Of Mixtures*) y la regla de mezclas inversa (iROM), respectivamente.

La teoría de mezclas clásica (CMT, *Classical Mixing Theory*), cuya expresión más simple es la ROM, fue por primera vez estudiada en 1960 [11] estableciendo las bases para trabajos subsecuentes [12] [13] [14] [15]. La CMT considera la fracción volumétrica de componentes pero no su distribución morfológica, puesto que asume que todos los materiales componentes experimentan el mismo estado de deformación en todas las direcciones (comportamiento paralelo puro). Esta hipótesis es una limitación fuerte para el uso de la CMT para predecir el comportamiento de la mayoría de los compuestos y por lo tanto varias modificaciones a esta teoría fueron propuestas [16], [17], [18].

### 1.1.5 Solución propuesta en el presente trabajo

Con el enfoque de los métodos de campo promedio (*mean field methods*), en el presente trabajo, se desarrolla una formulación para modelar específicamente el comportamiento material no-lineal de láminas reforzadas con fibras largas unidireccionales. Una primera versión de este modelo fue propuesta por Rastellini & Oller (2004) [19] para considerar materiales componentes con daño elástico y/o plasticidad aditiva. La generalización presentada aquí permite la composición (o mezcla) de materiales simples simulados numéricamente con cualquier modelo constitutivo no lineal, isótropo o no. Se basa en la gestión

apropiada de los modelos constitutivos de las fases componentes, en el marco de la mecánica de los medios continuos.

El modelo propuesto (para una sola lámina) se combina con teorías de laminación para describir laminados multidireccionales formados por capas unidireccionales con refuerzo continuo (fibras largas). Con la intención de propiciar aplicaciones numéricas del modelo, se pone especial atención en aspectos como la implementación en un código FEM y su rendimiento computacional.

Para probar la aplicabilidad al análisis de estructuras laminadas, se presentan los resultados obtenidos en varios análisis numéricos, los cuales también se comparan con resultados experimentales disponibles en la literatura [20] y con otros modelos considerados en el “ejercicio de fallo” (WWFE, *World Wide Failure Exercise*) [2].

## 1.2 Objetivo general

Este trabajo tiene como objetivo general el desarrollo, formulación teórica, implementación computacional y aplicación de un modelo numérico para laminados compuestos, capaz de simular adecuadamente el comportamiento constitutivo no lineal (ej.: debido a deformaciones plásticas o degradación elástica de sus componentes), resolviendo el “problema serie-paralelo” de una manera simple y eficiente; con la doble novedad de ser independiente del sistema de cargas, y de permitir acoplar/combinar modelos constitutivos no-lineales para materiales homogéneos de una manera general.

## 1.3 Objetivos específicos

Los objetivos específicos del trabajo de investigación se detallan a continuación:

1. Desarrollar un modelo numérico para laminados compuestos, capaz de simular adecuadamente el comportamiento no-lineal y el acoplamiento serie-paralelo de componentes con independencia del estado de cargas.

2. Desarrollar una técnica para la definición ágil de la orientación del material mediante el empleo de sistemas de referencia locales de material<sup>1</sup> para cada elemento de la malla, en función de la geometría del problema.
3. Adaptar el código FEM COMET [21] para permitir la modelación de estructuras laminares.
4. Adaptar el código FEM COMET [21] para permitir la definición de elementos finitos multimateriales.
5. Desarrollar elementos finitos laminados de los tipos 3D sólido isoparamétrico y lámina DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*). El primero para ser empleado en estructuras laminadas gruesas, y el segundo para las delgadas.
6. Proponer una metodología de calibración de “curvas de vida” para materiales compuestos mediante el empleo ensayos experimentales, con el fin de predecir el comportamiento a fatiga del compuesto.
7. Aplicar el modelo propuesto para compuestos al análisis del fenómeno de la fatiga en dichos materiales.
8. Mostrar que la generalidad del modelo permite la “composición” de variados modelos constitutivos no-lineales homogéneos para conseguir la respuesta del material compuesto heterogéneo.

## 1.4 Tareas científicas y Estructura del trabajo

Las tareas científicas desarrolladas se pueden clasificar en los grupos de actividades que se resumen a continuación, indicándose su relación con la estructura del trabajo.

**Grupo de actividades 1:** Investigación bibliográfica.

---

<sup>1</sup> Las propiedades mecánicas de los materiales anisótropos se indican referidas a un sistema de referencia local. Sin embargo, la geometría de una estructura (con simetría cilíndrica por ejemplo) requiere indicar la rotación del material (respecto al eje de cilindro por ejemplo) para cada elemento finito de la malla. Se denomina sistema de referencia local “de material” a aquel sistema de ejes coordenados que define la orientación de las propiedades anisótropas del material respecto del sistema global de la estructura.

La investigación bibliográfica consiste en el estudio de la simulación numérica de la mecánica de dos grandes grupos de materiales: los homogéneos y los compuestos. La primera parte del estudio (capítulo 2), se orienta a los fenómenos de degradación que son responsables del colapso de materiales homogéneos bajo cargas cuasi-estáticas (daño y plasticidad) y cíclicas (daño por fatiga), incluyendo el tratamiento de la anisotropía. La segunda (capítulo 3), se centra en la mecánica de los materiales compuestos analizando los modelos constitutivos y criterios de fallo según el enfoque de varios investigadores.

**Grupo de actividades 2:** Implementación de modelos numéricos para componentes.

Es necesario implementar los modelos constitutivos que permitan reproducir el comportamiento adecuado de los materiales componentes (fibra y matriz). Se requieren modelos de plasticidad, daño y fatiga que, a su vez, puedan tener en cuenta la anisotropía del material. Éstos son empleados por el modelo de materiales compuestos propuesto que se basa en una gestión adecuada de los algoritmos de los componentes.

Las implementaciones numéricas se realizan en el programa de elementos finitos COMET [21], desarrollado por CIMNE, el cual ya cuenta con una librería de modelos constitutivos disponibles (como por ejemplo: plasticidad “J2” y visco-daño) y posee también una librería con diferentes tipos de elementos finitos. Este código permite el análisis termo-mecánico de sólidos, además de poseer diferentes herramientas de interés para el cálculo, tales como aceleradores de convergencia, diferentes tipos de *solvers* (directos e iterativos), etc.

La implementación consiste en la modificación del código existente para incluir los algoritmos de los modelos constitutivos para materiales simples que han sido desarrollados previamente por otros autores; así como también las verificaciones y pruebas necesarias que garanticen su buen funcionamiento.

**Grupo de actividades 3:** Investigación y formulación teórica del modelo constitutivo propuesto para laminados compuestos (capítulo 4).

La formulación teórica del modelo constitutivo que se propone en este trabajo ha sido fruto de la evolución de desarrollos anteriores efectuados por el autor (ver capítulo 3), todos ellos concebidos con el objetivo de reproducir el comportamiento de materiales compuestos mediante la mezcla o composición de los comportamientos de los materiales constituyentes. El modelo final propuesto captura la no-linealidad constitutiva de sus fases componentes de manera veloz y precisa, cumpliendo con las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio internas.

La versión básica del modelo serie-paralelo (BSP) considera un comportamiento en paralelo en la dirección de alineación de las fibras a la vez que considera un comportamiento en serie puro de los componentes en direcciones ortogonales a la fibra. La versión final (ESP) es enriquecida en la dirección transversal mediante un parámetro que puede ser determinado mediante un estudio micromecánico y que depende de la fracción volumétrica de fibras y de la relación entre las rigideces de fibra y matriz.

**Grupo de actividades 4:** Implementación del modelo constitutivo propuesto y de los elementos finitos apropiados para laminados compuestos (capítulo 5).

Este grupo de actividades consiste en realizar la implementación del modelo constitutivo no-lineal propuesto para compuestos, y de los elementos laminados.

El modelo constitutivo propuesto se combina con elementos 3D sólidos isoparamétricos y con elementos lámina laminados. Ambos tipos de elementos requieren una adaptación de su mapa de memoria para almacenar toda la información (propiedades mecánicas y geométricas, variables internas y auxiliares) referente al material compuesto en sí y a sus componentes.

Para el desarrollo del elemento lámina laminado se toma como base un elemento lámina DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*) cuyo desarrollo se indica en el Anexo. La implementación de estos elementos requirió la adaptación el programa COMET [21] a este nuevo tipo de problema: estructuras laminares. La validación se realizó mediante la comparación con resultados teóricos y/o numéricos encontrados en la literatura.

**Grupo de actividades 5:** Validación del modelo propuesto y calibración de materiales (capítulo 6).

Una vez implementado el modelo propuesto, se verifica el cumplimiento de las ecuaciones de cierre, y se procede a la validación del mismo mediante el contraste con resultados experimentales. Se propone también la calibración de los parámetros de fatiga correspondientes a los materiales componentes.

Se realizan estudios comparativos entre la envolvente de fallo implícita resultante del modelo de composición propuesto (que emplea teorías de fallo y anisotropía a nivel de materiales componentes) con la envolvente proporcionada por los distintos criterios globales de fallo y resultados experimentales publicados en la literatura para láminas y laminados de material compuesto.

**Grupo de actividades 6:** Aplicaciones del modelo (capítulo 7).

En el capítulo 7 se analizan algunas aplicaciones del modelo propuesto realizadas sobre un elemento finito para mostrar las capacidades y cualidades del modelo, y

sobre probetas y piezas estructurales para mostrar la robustez del modelo. En los ejemplos se emplean tanto elementos 3D sólidos como elementos lámina para discretizar la geometría.

## 1.5 Novedad científica

La novedad en el campo científico que se aporta con el presente trabajo es el desarrollo conceptual del comportamiento de los materiales compuestos, la formulación teórica e implementación computacional de un modelo numérico para laminados compuestos, capaz de simular adecuadamente el comportamiento no-lineal y el acoplamiento serie-paralelo de sus fases componentes con independencia del estado de cargas.

## 1.6 Difusión del trabajo

Durante el trabajo de investigación se han publicado artículos e informes, volcando parte del contenido de este trabajo, bajo los siguientes títulos:

- ❑ Rastellini F, Oller S, Salomón O, Oñate E. (2003). "Advanced serial-parallel mixing theory for composite materials analysis. Continuum basis and finite element applications". *7th Int. Conf. on Computational Plasticity – Complas VII*. Ed. E. Oñate, D. R. Owen. Barcelona: CIMNE. ISBN: 84-95999-22-6. [on CD]
- ❑ Rastellini F, Oller S, Salomón O, Oñate E. (2003). "Teoría de mezclas serie-paralelo avanzada para el análisis de materiales compuestos". *Materiales Compuestos 2003*. Zaragoza: AEMAC. pp. 729-741. ISBN 84-9213-49-8-4
- ❑ Rastellini F, Oller S. (2004). "Modelado numérico de no linealidad constitutiva en laminados compuestos - Teoría de mezclas". *Métodos Computacionais em Engenharia*. Lisboa (Portugal): APMTAC.
- ❑ Rastellini F, Serpieri R. (2004). Implementación del elemento lámina lineal y triangular tipo DKT-CST en el código FEM COMET. *Informe Técnico CIMNE IT-434*. Julio 2004.
- ❑ Salomón O, Rastellini F, Oller S, Oñate E. (2005). "Fatigue prediction for composite materials and structures". *NATO Symposium AVT-121*, Granada (Spain) – Oct. 2005.



- ❑ Rastellini F. (2006). "Modelización numérica de la no linealidad constitutiva de laminados compuestos." *Universitat Politècnica de Catalunya*. Barcelona. [Tesis doctoral]
- ❑ Rastellini F, Salomón O, Oller S, Oñate E. (2006). "Non-linear mechanical damage modelling for long fibre-reinforced laminates". *CDCM06 - Conference on Damage in Composite Materials: Simulation and Non-Destructive Testing*, 18-19 Sept. 2006, Stuttgart (Germany).
- ❑ Salomón O, Rastellini F, Oller S, Oñate E. (2006). "Numerical analysis of composite materials and structural parts for automotive applications". *TRANSFAC'06 - International Conference on Innovative Solutions for the Transport Sector*, 4-6 Oct. 2006, San Sebastián (Spain).

y se ha colaborado con el desarrollo de los siguientes proyectos de investigación:

- ❑ Growth Project COMPASS (G5RD-CT-2001-00575): "A Methodology for Durability Assessment of Composite Materials and Structures under Cyclic Loads". Enero 2001 – Diciembre 2004.
- ❑ "Metodología para la Simulación Numérica del Comportamiento de Estructuras de Hormigón Armado Reparadas y/o Reforzadas con Materiales Compuestos", *Ministerio de Fomento de España (Secretaría de Estado de Infraestructuras)*.
- ❑ "Delaminación de Compuestos de Matriz Reforzada" (DELCOMAR - MAT2003-09768-C03-02.). *Comisión Ministerio de Ciencia y Tecnología. Secretaría de Estado de Política Científica y Tecnológica Dirección General de Investigación de España*.

## Referencias

- [1] Hull D. (1987). *"An introduction to composite materials"*. Cambridge University Press.
- [2] Hinton M. J. & Soden P. D. (1998). "Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise". *Composites Science & Technology*, Vol. 58, 1001-1010.
- [3] Liu KS, Tsai SW. (1998). "A progressive quadratic failure criterion for a laminate". *Composites Science & Technology*, 58:1023-1032.
- [4] Puck A. (1969). "Calculating the strength of glass fibre/plastic laminates under combined load". *Kunststoffe, German Plastics*, 55:18-19 (German text pp. 780-787).
- [5] Puck A, Schürmann H. (1998). "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models". *Composites Science & Technology*, 58(7):1045-67.
- [6] Puck A, Schürmann H. (2002). "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models". *Composites Science & Technology*, 62:1633-62.
- [7] Oller S, Miquel J, Zalamea F. (2005). "Composite material behavior using a homogenization double scale method". *Journal of Engineering Mechanics*, 131(1):65-79.
- [8] Car E, Zalamea F, Oller S, Miquel J, Oñate E. (2002). "Numerical simulation of fiber reinforced composite materials". *Int. Journal of Solids & Structures*. 39:1967-86.
- [9] Voigt W. (1889). "Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitäts-Constanten isotroper Körper", *Ann. Phys.*, 38, 573-587.
- [10] Reuss A. (1929). "Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle", *ZAMM*, 9, 49-58.
- [11] Trusdell C and Toupin R. (1960). *"The classical Field Theories"*. Berlin: Springer Verlag.

- [12] Green AE and Naghdi PM. (1965). "A dynamical theory of interacting continua". *Int. Journal Engineering Science*. Vol. 3, 231-241.
- [13] Ortiz M and Popov EP. (1982). "Plain Concrete as a Composite Material". *Mechanics of Materials*. Vol. 1, No. 2, 139-150.
- [14] Ortiz M and Popov EP. (1982). "Physical model for the inelasticity of concrete". *Proceedings of The Royal Society of London*. A383, 101-125.
- [15] Oller S, Oñate E, Miquel J, Botello S. (1996). "A plastic damage constitutive model for composite materials". *Int. Journal of Solids and Structures*. Vol. 33, No. 17, 2501-2518.
- [16] Neamtu L, Oller S, Oñate E. (1997). "A generalized mixing theory Elasto-Damage - Plastic model for finite element analysis of composites". In: *5th Int. Conf. on Computational Plasticity - Complas V*, editado por D.R. Owen, E. Oñate y E. Hinton. Barcelona: CIMNE.
- [17] Car E, Oller S, Oñate E. (2000). "Anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185:245-277.
- [18] Rastellini F, Oller S, Salomón O, Oñate E. (2003). "Advanced serial-parallel mixing theory for composite materials analysis. Continuum basis and finite element applications". *COMPLAS 2003, Proceeding (CD) of the VII International Conference on Computational Plasticity*. CIMNE, Barcelona (Spain).
- [19] Rastellini F, Oller S. (2004). "Modelado numérico de no linealidad constitutiva en laminados compuestos - Teoría de mezclas". *Proceeding (CD) of: Métodos Computacionais em Engenharia*. APMTAC, Lisbon (Portugal).
- [20] Soden P. D., Hinton M. J. & Kaddour A. S. (2002). "Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data". *Composites Science & Technology*, Vol. 62, 1489-1514.
- [21] Cervera M.; Agelet C.; Chiumenti M. (2002). *COMET: Coupled Mechanical and Thermal Analysis. Data input manual. Technical Report CIMNE N° IT-308*. Barcelona.

## 2 MECÁNICA DE LOS MATERIALES COMPONENTES

Este capítulo no constituye un Estado del Arte, sino que presenta una breve reseña de algunos modelos para simular la mecánica de materiales simples (i.e. homogéneos), que serán empleados, de manera combinada, para modelar la mecánica de materiales compuestos (i.e. heterogéneos), tema principal de este trabajo y cuyo estado del conocimiento se presentará en el capítulo siguiente.

El objetivo de este capítulo es describir algunas formulaciones constitutivas para los materiales simples que componen el material compuesto. La combinación (o composición) de modelos simples permitirá modelar la respuesta no-lineal del material compuesto.

Los fundamentos básicos de la Mecánica del Medio Continuo [1] [2] requieren considerar una descripción matemática de la tensión y la deformación, así como de la velocidad de deformación, que experimenta el medio y establecer una serie de condiciones que deben cumplir. Así, por ejemplo, se tienen las ecuaciones de equilibrio de fuerzas para las tensiones y las ecuaciones de compatibilidad para las deformaciones. Sin embargo, estas ecuaciones no son suficientes para resolver el problema. Para ello es necesario considerar también unas ecuaciones constitutivas, relaciones tensión-deformación, que caracterizan cada tipo de material y que describen el comportamiento macroscópico que resulta de su constitución interna.

El modelo constitutivo para materiales compuestos que se propone en el presente trabajo constituye, en realidad, un gestor de modelos constitutivos, dado que combina o compone algoritmos que han sido previamente desarrollados por otros autores para describir el comportamiento de materiales simples homogéneos (ej. epoxi, vidrio, metales) o materiales compuestos tratados como homogéneos (ej. hormigón, matrices reforzadas con microfibrillas).

Existen numerosos modelos para materiales simples, los cuales han alcanzado un alto grado de desarrollo, que permiten simular su comportamiento de manera cada vez más precisa.

A continuación, se realiza un breve estudio de la mecánica del daño en el contexto de los medios continuos analizando las utilidades y restricciones de este enfoque para su utilización en la modelización de los materiales componentes. Luego, se comenta la modelación del fenómeno de la fatiga también en el marco continuo. Finalmente, se detalla la evolución en el tratamiento de la anisotropía de los materiales y se describe brevemente el método de “mapeo” de espacios que permite utilizar modelos isótropos para simular la anisotropía de los materiales (ej. fibras de carbono).

## **2.1 Mecánica del daño continuo**

### **2.1.1 Fenomenología y micromecánica del daño**

El modelo inicial propuesto en 1985 por Kachanov [3] [4] pretendía medir la pérdida de rigidez de materiales con microfisuras mediante un parámetro de daño macroscópico y determinístico de tal manera que la historia de deformaciones inelásticas y su progreso podían ser definidas mediante la evolución de una variable interna que dependa del valor esperado de la densidad de micro-defectos presentes en el material.

Estos procesos de deformación irreversibles simulados con modelos tradicionales de daño local están basados en la termodinámica de variables internas cuya evolución depende de su historia y de la densidad y orientación de los microdefectos, pero no de su posición dentro del elemento de volumen representativo (que es aquel con mínimo volumen para el cual se cumple que las propiedades efectivas no dependen de su tamaño).

Estas variables internas se encuentran asociadas a reordenamientos irreversibles en la microestructura de los materiales.

La modelación del daño en la meso escala requiere parámetros tales como el módulo de Young, coeficiente de Poisson, tensiones umbrales de daño a compresión y tracción en las distintas direcciones; para lo cual es necesario contar con ensayos de tracción y compresión uniaxial. De dichos ensayos se determinan los valores iniciales de estos parámetros y su evolución para distintos estados de deformación. Otro parámetro importante a estimar es la energía de fractura liberada tanto en tracción como en compresión.

No hay que olvidar que el daño está íntimamente relacionado con la concentración de micro-fisuras pero, en la actualidad, esta medición no se realiza sistemáticamente. Como consecuencia, la mayoría de modelos de daño mecánico se enfocan a los procesos locales y dejan aparte la concentración de microdefectos.

Krajcinovic [5] puntualiza en su artículo que modelizar analíticamente la micromecánica del daño, es decir, la formación y evolución de microgrietas, es una tarea difícil de realizar debido a que la microestructura del material (como es el caso de compuestos por ejemplo) puede inducir la propagación de las microfisuras. Además, la distribución local y orientación de tensiones (que inducen el daño) y la textura material o microfibrillas (que resisten la evolución del daño) son variables estadísticas por naturaleza, y esta estadística evoluciona con el daño para diferentes estados de carga. El modo de evolución permite clasificar los materiales como “sensibles” o “tolerantes” al daño.

Otros fenómenos a tener en cuenta son la anisotropía inicial del material y la anisotropía inducida por el daño.

### **2.1.2 Modelos locales y no locales**

Para el caso de especímenes a compresión, Krajcinovic [5] aconseja que el modelo continuo racional sea no local y no asociativo para poder captar los efectos asociados con la interacción entre fisuras y la resistencia friccional cuando se cierran las fisuras, ya que la causa principal de deformaciones inelásticas a compresión está relacionada con la resistencia a la fricción de microfisuras que se deslizan, así como su apertura y cierre en descargas.

Luccioni [6] expone alternativas de solución a este problema como son algunos enfoques que introducen términos no locales (mediante una ecuación integral o una ecuación en gradientes) que se interpretan como una forma de tener en cuenta la subestructura heterogénea del material y que conduce a mecanismos como el movimiento por dislocación en plasticidad o la interacción entre microfisuras en materiales heterogéneos del tipo del hormigón. “Los continuos clásicos son incapaces de describir esta interacción a nivel de punto material”. Por

lo tanto, los modelos locales para tratar el daño no pueden tener en cuenta los fenómenos recientemente descritos.

### 2.1.3 Modelos de daño continuo

Cuando las microfisuras están distribuidas aleatoriamente en todas direcciones, una opción apropiada es la utilización de modelos de daño isótropos (o de una variable de daño escalar) como el propuesto por Oliver *et al.* [7], pionero por la sencillez del método. El empleo de una sola variable de daño proporciona agilidad de cálculo, pero también implica que el material sigue siendo isótropo luego de producirse el daño. Esto puede resultar una limitación en algunos problemas.

Para captar las áreas y direcciones con mayor probabilidad de orientación de microfisuras y tener en cuenta características microestructurales de ciertos materiales, se recurre a utilizar modelos de daño direccionado. Estos modelos pretenden simular el comportamiento de los materiales bajo condiciones de carga especiales y el de la mayoría de los materiales frágiles que desarrollan lo que se denomina como daño anisótropo. Debe utilizarse más de una variable de daño para poder captar las fisuras cuya orientación depende de la historia de tensiones. Es por ello que diversos autores han propuesto modelos con más de una variable escalar e incluso tensores de segundo, cuarto y octavo orden como variables de daño. Krajcinovic & Fonseka [8] utilizan un vector de daño; Lemaitre *et al.* [9], Mazars & Pijaudier-Cabot [10], Carol *et al.* [11] emplean tensores de segundo orden; y Simo & Ju [12] tensores de cuarto orden; para poder reproducir la anisotropía inducida por el daño.

Luccioni y Oller [13] [14] utilizan un tensor de segundo orden de daño simétrico y proponen interpretar el daño mediante una transformación cinemática entre un espacio real dañado y un espacio ficticio no dañado basándose en una interpretación de reducción del área efectiva extendida al caso direccionado, pudiéndose considerar, además, la anisotropía inicial mediante una transformación de espacios adicional.

### 2.1.4 Daño unilateral

En ciertos materiales, tales como el hormigón, se produce un fenómeno que no puede ser representado con los modelos mencionados en el apartado anterior, ya que las fisuras que se generan a tracción pueden cerrarse en un estado de compresión con una aparente recuperación. Sin perder la irreversibilidad del daño, este fenómeno permite hablar de daño activo o pasivo, dependiendo del estado de carga al que es sometido el material.

Krajcinovic [5] menciona que sólo las microfisuras activas (o abiertas), que suponen una discontinuidad local en el campo de deformaciones, afectan la macro respuesta del sistema; y que las microfisuras pasivas pueden activarse al cambiar el estado de carga.

Por lo tanto, los modelos de daño para materiales friccionales, además de captar la degradación de rigidez elástica, deben tener memorias diferentes para procesos de daño originados por esfuerzos de tracción y de compresión. Con este fin, los tensores de tensión y deformación se descomponen en una proyección positiva y otra negativa.

Existen diversos modelos que han enfocado su estudio a este fenómeno. En 1989, Mazars y Cabot [15] presentan un modelo muy atractivo por su simplicidad que utiliza dos variables escalares de daño (una para tracción y la otra para compresión). Este modelo realiza la descomposición del tensor de tensiones en sus partes positiva y negativa para tener en cuenta la activación del daño, pero no puede simular la anisotropía inducida por el mismo. Para describir esta anisotropía, Ju [16] propone modelar el daño mediante un tensor de cuarto orden. En 1995, una herramienta más poderosa es propuesta por Chaboche [17] al combinar una condición unilateral para daño activo/pasivo con una ecuación de evolución de daño anisótropo también con variable de cuarto orden. Posteriormente, Martín [18] conjuga el modelo de daño escalar explícito con la condición de daño unilateral propuesta por Chaboche, sin embargo, este modelo no asegura que la disipación espuria sea nula bajo historias de deformación con rotación de las direcciones principales de deformación.

Además de considerar la activación del daño, algunos autores presentan también superficies umbrales de daño (y su evolución) diferenciadas para tracción y compresión con el fin de modelar materiales con este tipo de comportamiento.

### 2.1.5 Acoplamiento del daño con viscosidad y con plasticidad

Los efectos de la velocidad de deformación en la fisuración o el daño adquieren importancia al analizar dinámicamente las estructuras frente a problemas de impacto o explosiones. La inclusión de parámetros viscosos en los modelos constitutivos no es mencionada en el artículo de Krajcinovic [5].

Como ejemplo se pueden mencionar dos modelos escalares dependientes del tiempo: uno explícito de Simo & Ju [12], y otro implícito propuesto por Lueghe *et al.* [19]. Ambos se basan en la regularización viscosa de Perzyna.

Experimentalmente se ha probado la vinculación del daño con micro-deformaciones plásticas. Por tanto, es importante compatibilizar la plasticidad



con el daño, porque aunque el daño no influye directamente en el mecanismo de deslizamiento que causa las deformaciones permanentes, sí existe un acoplamiento indirecto debido al aumento de la tensión efectiva y que se ve reflejado en las ecuaciones que gobiernan la evolución de las variables internas.

Al combinar daño y plasticidad surgen varias posibilidades de relacionar las leyes elásticas con las de endurecimiento plástico. La complicación es mayor cuando, además, se pretende tener en cuenta la anisotropía inducida por el daño. Es por ello que la mayoría de modelos de daño, que acoplan fenómenos plásticos, son escalares. Se puede hacer referencia a los modelos de Besson *et al.* [20], Simo & Ju [21], Luccioni *et al.* [22] y Faria *et al.* [23], entre otros.

El modelo con mayor generalidad es el presentado por Voyiadjis & Deliktas [24], que trata de manera incremental el acoplamiento de plasticidad y daño con posibilidad de incluir parámetros viscosos.

Sin embargo, debe tenerse presente que la aplicación práctica de modelos complejos requiere gran potencia de cálculo y, por este motivo, siguen utilizándose modelos más sencillos, como los de daño isótropo (ver Oliver *et al.* [7]), aunque no se ajusten adecuadamente al comportamiento complejo de ciertos materiales.

## **2.2 Modelo mecánico continuo para análisis de la fatiga**

La fatiga se define como el proceso de cambio estructural permanente, progresivo y localizado, que ocurre en un punto material sometido a deformaciones y tensiones de amplitudes variables que producen micro-fisuras, cuya evolución y concentración conducen al fallo total después de un cierto número de ciclos de aplicación de carga. Es la principal causa de fallo de las partes mecánicas en servicio, en mecanismos y elementos estructurales en la industria automotriz, naval y aeronáutica. El fallo por fatiga puede ocurrir bajo condiciones de carga muy por debajo de la resistencia límite del material. Normalmente, se produce una pérdida progresiva de la resistencia que depende del número de ciclos, del índice de reversión (relación entre la tensión máxima y la mínima) y de la amplitud de la carga, entre otros factores. Esta pérdida de resistencia produce, en la macro-escala, un comportamiento inelástico en el material, que se corresponde con la generación, propagación y agrupación de micro-grietas conductoras al colapso estructural.

Varios modelos numéricos para simular este fenómeno están basados en la hipótesis de que el daño por fatiga es, esencialmente, de la misma naturaleza que el daño mecánico, y puede ser descrito mediante una variable interna que permita el tratamiento adecuado de la acumulación y localización de micro-defectos. Por

este motivo, la base teórica de la mecánica del continuo es apropiada para el estudio de la no-linealidad de materiales sometidos a fatiga. Las teorías no-lineales de plasticidad y daño permiten abordar problemas más allá del límite elástico reproduciendo el cambio en la resistencia que se origina en un punto material debido a efectos inelásticos; sin embargo, estos modelos no son sensibles a los efectos producidos por cargas cíclicas. Los trabajos iniciales de Suero y Oller [25], [26], actualizados en Oller *et al.* [27], proponen una modificación de las teorías inelásticas estándares para incluir la consideración de la fatiga acoplada con fenómenos no relacionados con ésta. A continuación se realiza una descripción de este modelo.

### 2.2.1 Marco teórico

Se asume que cada punto del sólido sigue una ley constitutiva elasto-plástica con daño donde la evolución de la tensión ( $S$ ) depende de la deformación elástica ( $E^e$ ) –variable libre– y de un conjunto de variables internas de daño y plasticidad  $q = \{\alpha^p, d\} = \{E^p, \kappa^p, d = \kappa^d\}$ , donde  $E^p$  y  $\kappa^{ini} \leq (\kappa = \kappa^p + \kappa^d) \leq 1$  representan la parte elástica de la deformación y la disipación normalizada compuesta por sus partes plásticas y de daño, respectivamente.

Considerando pequeñas deformaciones elásticas y grandes deformaciones plásticas se puede aceptar la aditividad de la energía libre en sus partes elástica  $\Psi^e$  y plástica  $\Psi^p$ ; la cual, para procesos isotérmicos, puede ser escrita en la configuración referencial de la siguiente manera:

$$\Psi = \Psi^e(E_{ij}^e, d) + \Psi^p(\alpha_i^p) = (1-d) \frac{1}{2m^0} [E_{ij}^e C_{ijkl}^0 E_{kl}^e] + \Psi^p(\alpha_i^p) \quad (2.1)$$

donde  $E^e$  es el tensor de deformación elástica de Green,  $m^0$  es la densidad del material,  $d = \kappa^d$  es la variable interna del proceso de daño  $d^{ini} \leq (d = \kappa^d) \leq 1$  con un valor inicial de defectos  $d^{ini} \equiv \kappa^{ini}$ , y  $C_{ijkl}^0$  es el tensor constitutivo inicial.

El tensor de tensiones en la configuración de referencia  $S_{ij}$  se deriva de la siguiente manera:

$$S_{ij} = m^0 \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}^e} = (1-d) C_{ijkl}^0 E_{kl}^e \quad (2.2)$$

Para el comportamiento plástico, las formas generales de las funciones de fluencia  $F$  y potencial plástico  $G$  tienen en cuenta la influencia del estado actual de tensiones, las variables internas plásticas, y otras variables tales como el número  $N$  de ciclos de aplicación de la carga:

$$\begin{aligned} F(S_{ij}, \kappa) &= f(S_{ij}) - K(S_{ij}, \kappa, N) \\ G(S_{ij}) &= g(S_{ij}) = \text{constant.} \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $f(S_{ij})$  y  $g(S_{ij})$  son las funciones correspondientes a un estado de tensión uniaxial equivalente,  $K(S_{ij}, \kappa, N)$  es el umbral de resistencia (ver Fig. 2.1).

Todas las variables internas del tiempo actual  $t$  son obtenidas mediante un proceso de integración  $\alpha_i^p = \int_0^t \dot{\alpha}_i^p dt$ , considerando su ley de evolución  $\alpha_i^p = \dot{\lambda} H_i^p(S_{kl}, \alpha_k^p)$ , donde  $\lambda$  es el parámetro de consistencia plástica.

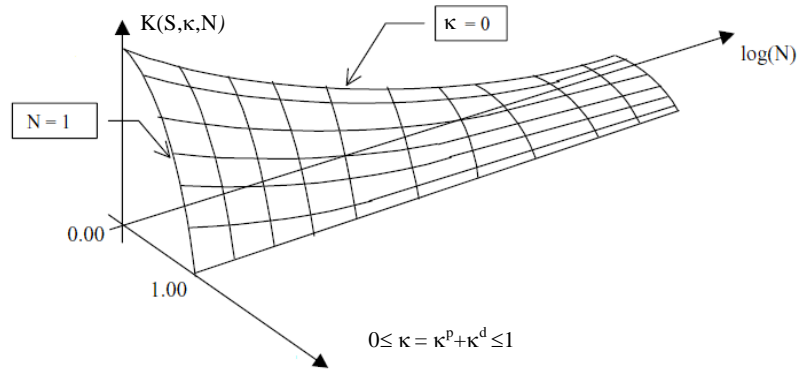


Fig. 2.1 – Umbral de resistencia uniaxial para un material simbólico.

La función de daño se define como:

$$G^D(S_{ij}, \kappa) = \bar{S}(S_{ij}) - K(S_{ij}, \kappa, N) \quad (2.4)$$

donde  $\bar{S}(S_{ij})$  es la función de tensión uniaxial equivalente en el espacio no-dañado,  $K(S_{ij}, \kappa, N)$  es el mismo umbral de resistencia que en (2.3) y  $\kappa^d = d = \int_0^t \dot{d} dt$  es la variable interna de daño con una evolución definida como  $\dot{d} = \dot{\mu} H^D(S_{kl}, d)$ , donde  $\mu$  es el parámetro de consistencia de daño.

Tanto en (2.3) como en (2.4), la disipación normalizada se define como  $\kappa = \kappa^p + \kappa^d = (\Xi^p + \Xi^d) / \Xi^{\max}$ , donde  $\Xi^p, \Xi^d, \Xi^{\max}$  son las disipaciones de Clausius-Duhem para los procesos actuales de plasticidad, daño y para la máxima capacidad de disipación del sólido en cada punto, respectivamente.

El efecto del número de ciclos en las condiciones de consistencia plástica y/o de daño ( $\dot{F} = 0, \dot{G}^D = 0$ ) se presentan a continuación:

$$f(S_{ij}) - \underbrace{K(S_{ij}, \kappa) \cdot f_{red}(N, S_{med}, R)}_{K(S_{ij}, R, N)} = 0 \quad (2.5)$$

$$\bar{S}(S_{ij}) - \underbrace{K(S_{ij}, \kappa) \cdot f_{red}(N, S_{med}, R)}_{K(S_{ij}, R, N)} = 0 \quad (2.6)$$

donde  $0 \leq f_{red} \leq 1$  representa el factor normalizado de reducción del umbral de resistencia  $K$  –evolución de la resistencia plástica y/o de daño– debido a cargas cíclicas.

### 2.2.2 Curvas de vida S-N

Las curvas de vida “Tensión vs. Número de ciclos” (S-N) se obtienen experimentalmente sometiendo probetas idénticas a ciclos armónicos de carga con control de tensión y estableciendo su duración de vida medida en números de ciclos. Las curvas dependen de la máxima tensión aplicada y de la relación entre la tensión mínima y máxima ( $R = S_{min} / S_{max}$ ). Salomón *et al.* [28] [29] proponen una función exponencial para relacionar estos parámetros con las curvas S-N experimentales de aceros y aluminios. Esta función puede contemplar cualquier valor de  $R$ . Sin embargo, el ajuste de sus parámetros requiere cierta destreza para obtener una buena aproximación con las curvas experimentales, las cuales generalmente no están definidas para todo el período de vida del material. Una alternativa al uso de esta función exponencial es la definición directa de una función mediante una tabla de puntos tomados de los datos experimentales, y adoptando una interpolación logarítmica para valores intermedios.

Usualmente, las curvas S-N se obtienen para un estado de tensión totalmente revertido (tensión media nula) mediante ensayos de fatiga a flexión rotativa. Sin embargo, éste no es el estado típico de trabajo de componentes industriales reales sometidos a cargas cíclicas. Por lo tanto, es necesario adoptar un valor adecuado de tensión umbral  $S_{th}$  basado en el actual valor de  $R$  y en el valor referencial de la tensión de indurancia  $S_e$  (para  $R = -1$ ). Es decir,  $S_{th}$  sería la tensión de indurancia límite para un valor dado de  $R = S_{min} / S_{max}$ . Cuando  $R = -1$ , entonces  $S_{th} = S_e$ , pero para  $R = 1$  el valor de la tensión umbral coincide con la tensión última del material  $S_{th} = S_u$ .

$$\begin{aligned} S_{th} &= S_e + (S_u - S_e) \cdot (0.5 + 0.5 \cdot R)^{STHR1} \longleftarrow abs(R) \leq 1 \\ S_{th} &= S_e + (S_u - S_e) \cdot (0.5 + 0.5 / R)^{STHR2} \longleftarrow abs(R) \geq 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$STHR1$  y  $STHR2$  son parámetros del material que necesitan ser ajustados con resultados experimentales.

### 2.2.3 Función de reducción de la resistencia por fatiga

Las curvas S-N propuestas en la sección anterior son predictoras de la vida por fatiga para un punto material con una tensión máxima fija y un cociente  $R$  dado. Si, después de la aplicación de un número de ciclos más bajo que el límite de ciclos de rotura, se quitan las cargas cíclicas de amplitud constante que generan esa tensión máxima  $S_{\max}$  (y cociente  $R$ ), es de esperarse cierto cambio en  $S_u$  efectivo debido a la acumulación de ciclos de fatiga. Para describir la variación de  $S_u$  efectivo, se propone la siguiente función de reducción (de origen experimental):

$$\begin{aligned} fred(R, Ncycles) &= \exp(-B0 \cdot (\log 10(Ncycles))^{BETAF}) \\ B0 &= -\log 10(S_{\max} / S_u) / (\log 10(N_F))^{BETAF} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$BETAF$  es un parámetro del material y  $N_F$  es el número de ciclos a rotura.

### 2.2.4 Estrategia de avance en el tiempo

Una ventaja de la metodología presentada consiste en la manera en que se aplica la carga. En un problema mecánico, cada intervalo de carga se aplica en dos etapas, en el siguiente orden (ver Fig. 2.2),

-**Carga de seguimiento o “tracing load”**, (representada por los períodos “ai” en la Fig. 2.2). Se utiliza para obtener la relación entre tensiones mínima y máxima ( $R = S_{\min} / S_{\max}$ ) en cada punto de la integración, siguiendo la trayectoria del camino de carga durante varios ciclos hasta que la relación  $R$  tienda a un valor constante. Esto ocurre cuando la norma siguiente es satisfecha,

$$\eta = \sum_{GP} \left\| \frac{R_{GP}^{i+1} - R_{GP}^i}{R_{GP}^{i+1}} \right\| \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

donde  $R_{GP}^i = S_{\min} / S_{\max} \Big|_{GP}^i$  es calculado en cada punto de integración para el incremento de carga “i”.

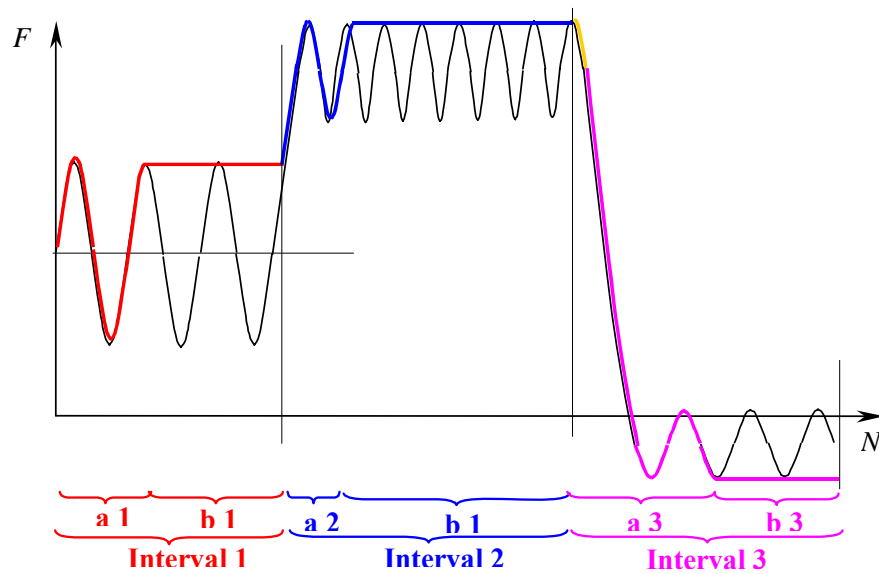


Fig. 2.2 – Representación esquemática del avance de cargas en el tiempo. "ai" indica la etapa de carga de seguimiento en el intervalo "i". "bi" indica la etapa de carga sobre la envolvente en el mismo intervalo.

-Carga sobre la envolvente o "*enveloping load*", (representada por los períodos "bi" en la Fig. 2.2). Después de la primera etapa de carga (ai), el número de los ciclos  $N$  se incrementa mientras se mantiene constante la carga máxima aplicada (línea gruesa en la Fig. 2.2) y el cociente  $R$ . En esta nueva etapa de carga, la variable no es el nivel de carga (que se mantiene constante) sino el número de ciclos.

Esta estrategia de dos etapas permite un avance muy rápido de la carga en el tiempo. Un nuevo intervalo con las dos etapas explicadas debería agregarse para cada cambio en el nivel de carga.

## 2.3 Anisotropía- Mapeo de espacios

Los compuestos reforzados con fibras constituyen materiales con una elevada anisotropía y una fuerte "no proporcionalidad" (un material "no proporcional" es aquel cuya relación entre los módulos elásticos en dos direcciones cualesquiera es diferente a la relación entre las resistencias).

El estudio, en régimen elástico, de un sólido anisótropo no presenta grandes dificultades dado que es posible utilizar para tal fin la teoría de elasticidad en su forma general. Sin embargo, la formulación de una ley constitutiva adecuada para simular el comportamiento no lineal de sólidos ortótropos o anisótropos no proporcionales constituye un problema más complejo.

En 1950, Hill da los primeros pasos en formular funciones de fluencia para un material ortótropo no proporcional mediante la extensión de la función de fluencia isótropa de Von Mises –actualmente conocida como función de fluencia de Hill [30]– que posteriormente ha sido mejorada en 1979 [31], en 1990 [32] y en 1993 [33]. También otros autores han propuesto funciones de fluencia en el espacio anisótropo. Bassani en 1977 [34] y Barlat *et al.* en 1989 [35] [36] utilizan una transformación lineal del estado tensional del material anisótropo. En 1982, Dvorak & Bahei-El-Din [37] utilizan operadores tensoriales junto con el criterio de fluencia de Von Mises para el análisis de materiales compuestos. Shih & Lee (1978) [38], Eisenberg & Yen (1984) [39], Voyiadjis & Foroozesh (1990) [40], y Voyiadjis & Thiagarajan (1997) [41] han utilizado tensores de cuarto orden en la formulación de criterios de fluencia para materiales anisótropos.

Por lo tanto, el procedimiento tradicional para obtener las ecuaciones constitutivas de este tipo de materiales se basa en la descripción de las superficies anisótropas que limitan el dominio elástico, tanto para plasticidad como para daño, mediante propiedades características del material. Sin embargo, la solución adoptada en el presente trabajo para considerar la anisotropía de los materiales componentes (ej: fibras de carbono), se basa en el concepto de mapeo de tensiones (*mapped stress tensor*) propuesto por Betten [42] [43]. La idea básica consiste en modelar el comportamiento de un sólido en el espacio real anisótropo mediante un sólido ideal en un espacio isótropo ficticio a través de una relación lineal entre los dos espacios (ver Figura 2.3). Este enfoque hace posible el uso de formulaciones isótropas no lineales conocidas, con las ventajas numéricas que ello supone. Por ejemplo, con esta metodología se garantiza la convexidad de la función de fluencia y del potencial plástico [44]. La convexidad de la función de fluencia asegura el cumplimiento de la segunda ley de la termodinámica y garantiza que luego de aplicar una carga plástica, monótona creciente, cualquier descarga conduce a un estado elástico. De acuerdo con el mapeo de tensiones de Betten, el modelo se basa en realizar una transformación lineal del tensor de tensiones suponiendo que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios lo cual introduce una limitación en la teoría anisótropa mapeada. Esta limitación está dada por el hecho de que se debe respetar la proporcionalidad entre el límite de resistencia y el módulo de elasticidad para cada dirección del material. Para evitar este inconveniente Oller *et al.* [45] proponen, en 1995, que la aplicación lineal se realice tanto sobre el espacio de tensiones como sobre el de deformaciones. Más recientemente, Oller *et al.* [46] han desarrollado, además, una generalización de la teoría de plasticidad isótropa al caso anisótropo con este procedimiento.

Este procedimiento resulta aplicable a materiales que presentan una alta anisotropía, y permite una generalización de los modelos no lineales para materiales isótropos. La utilización de la teoría de transformación de espacios

permite obtener una metodología para la definición de modelos anisótropos de carácter generalizado.

El comportamiento anisótropo del material se formula a través de un espacio ficticio isótropo de tensiones y deformaciones que resulta de una transformación tensorial lineal de los espacios reales de tensiones y deformaciones anisótropas.

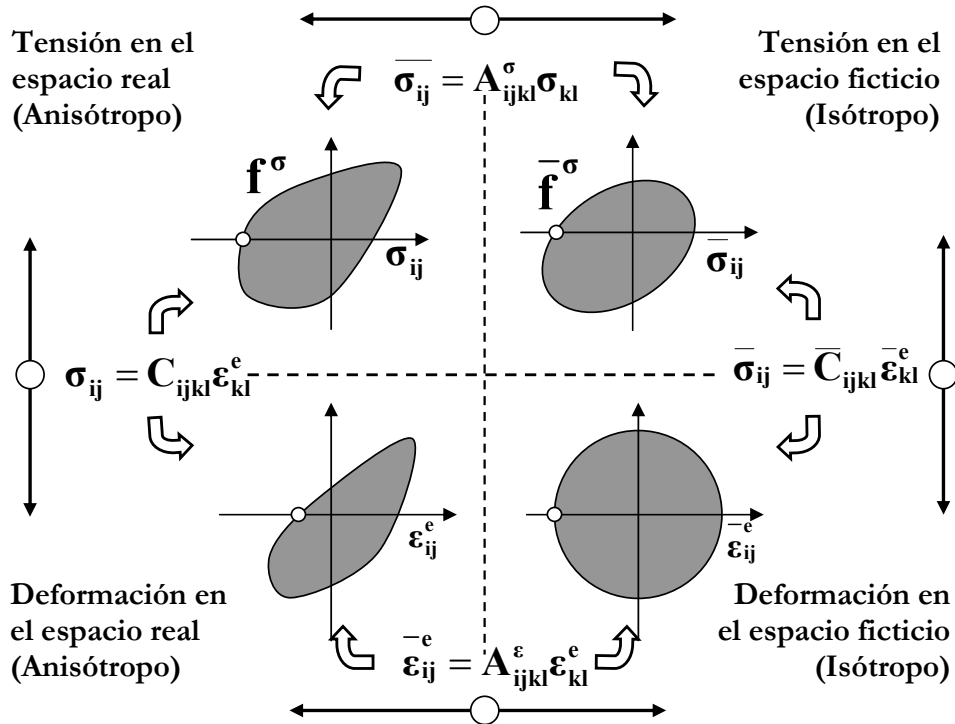


Figura 2.3 – Diagrama esquemático que muestra las relaciones entre los dominios elásticos del campo de tensiones y del de deformaciones, para los espacios isótropo ficticio y anisótropo real.

Los parámetros que intervienen en la definición del tensor de transformación se obtienen a través de ensayos experimentales. La ventaja en la utilización de este tipo de modelos consiste en la posibilidad de utilizar las mismas funciones de fluencia, potenciales plásticos y métodos de integración de la ecuación constitutiva desarrollados para materiales isótropos.

Toda la información de la anisotropía del material se encuentra en los tensores de cuarto orden de transformación de los espacios de tensiones y deformaciones (ver Figura 2.3). Los parámetros que definen el tensor de transformación de tensiones ( $A^\sigma$ ) se pueden calcular a partir de las propiedades elásticas y de resistencia del material anisótropo. Estas propiedades se obtienen mediante experimentación en probetas de laboratorio o mediante las formulaciones de la micromecánica y los criterios de fallo que proponen distintos autores. Luego, el tensor de transformación de deformaciones ( $A^\epsilon$ ) se puede calcular a partir del tensor  $A^\sigma$ , teniendo en cuenta, además, las matrices de rigidez del material anisótropo real y



la del isótropo ficticio. En la Figura 2.3 se muestra un diagrama con las distintas transformaciones de espacio en la configuración material y se esquematiza la variación de los distintos dominios elásticos.

La formulación resultante es completamente general, y su uso, en combinación con teorías de mezclas o composición, permite realizar análisis de materiales multifase que presentan un grado de anisotropía elevado.

Una descripción detallada de esta metodología y de su implementación numérica se puede encontrar en Car [47] [48]. Sin embargo, debe hacerse la observación de que la velocidad de convergencia es baja, probablemente debido a la suposición de que los tensores de transformación de espacio siguen siendo constantes durante todo el proceso no-lineal. La expresión del operador tangente de este modelo tendría que considerar, principalmente, la evolución de  $A^e$  en el pseudo-tiempo, inducida por el cambio en la rigidez del material.

Observación: Si bien la metodología de mapeo de espacios permitiría abordar la anisotropía del material compuesto en su conjunto, en el presente trabajo sólo se aplicará este procedimiento para modelar materiales componentes anisótropos (ej.: fibras de carbono). La anisotropía global que presentan los materiales compuestos reforzados con fibras, es considerada de manera natural por el modelo para compuestos (modelo SP) que se presenta en este trabajo (capítulo 4). Es decir, no será necesario emplear ninguna formulación anisótropa si se emplean componentes isótropos (matriz epoxi, fibras de vidrio, etc.); sin embargo la respuesta global (proporcionada por el modelo SP) será ortótropa naturalmente, como consecuencia de la alineación de fibras en una determinada dirección.

## Referencias

- [1] Malvern LE. (1969). *"Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium"*. Prentice-Hall, Inc.
- [2] Oliver X. and Agelet C. (2000). *"Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros"*. Barcelona: Edicions UPC.
- [3] Kachanov, Lazar. M. (1958). Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie tekhnicheskikh nauk*, No. 8, 26–31. [in Russian].
- [4] Kachanov, Lazar. M. (1999) (Leningrad University). Rupture time under creep conditions. *Int. Journal of Fracture*. Vol.97, pp. xi–xviii.
- [5] Krajcinovic, Dusan (2000). Damage mechanics: accomplishments, trends and needs. *Int. Journal of Solids and Structures*, Vol.37, 267-277.
- [6] Luccioni B. (2003). *"Mecánica de Daño Continuo"*. Monograph M71. Barcelona: CIMNE.
- [7] Oliver J, Cervera M, Oller S, Lubliner J. (1990). "Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete". In: N. Bicaníé et al. (ed) *Proc. SCI-C Computer Aided analysis and Design of Concrete Structures*, pp. 945-957.
- [8] Krajcinovic, D. & Fonseka, G. U. (1981) The continuous damage theory of brittle materials. Parts 1 & 2. *ASME J. Appl. Mech.* Vol.48, 809-815, 816-824.
- [9] Lemaitre J., Desmorat R., Sauzay M. (2000). Anisotropic damage law of evolution. *Eur. J. Mech. A/ Solids*. Vol. 19(2), 187-208.
- [10] Mazars J. & Pijaudier-Cabot G. (1989). Continuum damage theory - Application to concrete. *J. Engng. Mech. ASCE*. Vol.115, 345-365.
- [11] Carol I., Rizzi E., William K. (2001). On the formulation of isotropic and anisotropic damage. Parts 1 & 2. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38(4), 491-518, 519-546.
- [12] Simo C. & Ju J. (1987). Stress and strain based continuum damage models. Part I and II. *Int. J. Solids Structures* Vol.23, 821-840, 841-869.
- [13] Luccioni B., Oller S. (2002). Modelo de daño direccionado para materiales anisótrpos. *Mecánica Computacional*. Vol. XXI, 739-754.

- [14] Luccioni B., Oller S. (2003). A directional Damage Model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 192, No. 9-10, 1119-1145.
- [15] Mazars J. and Pijaudier-Cabot G. (1989). Continuum damage theory - application to concrete. *J. Engng. Mech.* ASCE 115, 354-365.
- [16] Ju J. W. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modelling and computational aspects. *Int. J. Solids Structures*. Vol.25, No.7, 803-833.
- [17] Chaboche, J.L. (1995). A continuum damage theory with anisotropic and unilateral damage. *La Recherche Aéronautique*. No. 2, 139-147.
- [18] Martín, O. (2001). *Modelo de daño anisótropo*. Universidad Nacional de Tucumán, Argentina [Ph.D. Thesis].
- [19] Luege, M.; Luccioni, B.; Danesi, R. (2002). Modelo de daño dependiente de la velocidad de deformación. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. Barcelona: UPC. Vol. 18, No. 1, 3-17.
- [20] Besson, J.; Cailletaud, G.; Chaboche, J.L.; Forest S. (2001). *Mécanique non linéaire des matériaux*, Hermes Science Europe Ltd, Paris.
- [21] Simo, C.; Ju, J. (1987). Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Part I and II. *Int. J. Solids Structures* Vol. 23, No. 7, 821-840, 841-869.
- [22] Luccioni, B.; Oller, S.; Danesi, R. (1996). Coupled plastic-damaged model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* Vol. 129, 81-89.
- [23] Faria, R.; Oliver, J.; Cervera, M. (1998). A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 35, No. 14, 1533-1558.
- [24] Voyiadjis, G. Z.; Deliktas, B. (2000). A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials. *Compt. Methos Appl. Mech. Engrg.* Vol. 183, 159-199.
- [25] Suero A, Oller S. (1998). *“Tratamiento del fenómeno de fatiga mediante la mecánica de medios continuos”*. Monografía M45. Barcelona: CIMNE.
- [26] Oller S, Suero A. (1999). *“Tratamiento del fenómeno de fatiga isotérmica mediante la mecánica de medios continuos”*. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 15(1):3-29.
- [27] Oller S, Salomón O, Oñate E. (2005). *“A continuum mechanics model for mechanical fatigue analysis”*. *Computational Materials Science*, 32, 175–195.

- [28] Salomón O, Oller S, Oñate E. (2002). "Industrial Application of Fatigue Damage Analysis and FEM", *NAFEMS-FENET Technology Workshops. Durability and Life Extension*. Zurich(Geroldswill), Switzerland.
- [29] Salomón O, Oller S, Oñate E. (2002). "Fatigue Damage Modelling and Finite Elements Analysis Methodology: Continuum Basis and Applications", *FATIGUE 2002, Proceeding of the Eighth International Fatigue Congress*, Ed. A.F.Blom, Stockholm, Sweden, pag. 2689-2696, Vol.4/5
- [30] Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford Univ. Press.
- [31] Hill, R. (1979). Theoretical plasticity of textured aggregates. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 85, 179-191.
- [32] Hill, R. (1990). Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. *J. Mechanics, Physics and Solids*. Vol. 38, no. 3, 405-417.
- [33] Hill, R. (1993). A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 35, 19-25.
- [34] Bassani, J.L. (1977). Yield characterization of metals with transversely isotropic plastic properties. *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 19, 651-660.
- [35] Barlat, F.; Lian, J. (1989). Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheet under plane stress conditions. *Int. Journal of Plasticity* Vol. 5, 51-66.
- [36] Barlat, F.; Lege, D.J.; Brem, J.C. (1991). A six-component yield function for anisotropic materials. *Int. Journal of Plasticity* Vol. 7, 693-712.
- [37] Dvorak, G.J.; Bahei-El-Din, Y.A. (1982). Plasticity analysis of fibrous composites. *J. App. Mech.* Vol. 49, 327-335.
- [38] Shih, C.F.; Lee, D. (1978). Further developments in anisotropic plasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, Vol. 100, 294-302.
- [39] Eisenberg, M.A. ; Yen, C.F. (1984). The anisotropic deformation of yield surfaces. *J. Engng. Mater. Technol., ASME*. Vol. 106, 355-360.
- [40] Voyiadjis, G.Z.; Foroozesh, M. (1990). Anisotropic distortional yield model. *Journal of Applied Mechanics, ASME*. Vol. 57, No. 3, 537-547.
- [41] Voyiadjis, G.Z.; Thiagarajan, G. (1997). Micro and Macro Anisotropic Cyclic Damage-Plasticity Models for Metal Matrix Composites. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 35, No. 5, 467-484.

- [42] Betten, J. (1981). Creep theory of anisotropic solids. *J. Rheol.* Vol. 25, 565-581.
- [43] Betten, J. (1988). Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *Int. J. Plasticity.* Vol. 4, 29-46.
- [44] Eggleston, Harold G. (1969). *Convexity.* Vol. 47. Cambridge, Eng.: Cambridge University Press.
- [45] Oller, S.; Botello, S.; Canet, J.; Oñate, E. (1995). An anisotropic elasto-plastic model based on an isotropic formulation. *Int. J. Comput. Eng. Comput.* Vol. 12, No. 3, 245-262.
- [46] Oller, S.; Car, E.; Lubliner, J. (2003). Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* Vol. 192, No. 7-8, 895-912.
- [47] Car E. (2000). "*Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*". Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. [Tesis doctoral].
- [48] Car E, Oller S, Oñate E. (2000). "*Tratamiento numérico de los materiales compuestos*". Monografía M57. Barcelona: CIMNE.

## **3 MECÁNICA DE LOS MATERIALES COMPUESTOS**

En el presente capítulo se estudian algunos aspectos de la mecánica de materiales compuestos relacionados con la simulación numérica de los mismos, y se describe el estado del conocimiento en los temas de modelización constitutiva y criterios de fallo para compuestos. Se muestra también la evolución de la teoría de mezclas desde su versión clásica hasta los modelos serie-paralelo que han motivado la formulación constitutiva que se desarrolla en el presente trabajo.

### **3.1 Introducción**

El uso de materiales compuestos, especialmente los polímeros reforzados con fibras largas, ha experimentado un gran aumento y hoy en día son ampliamente usados en muchos campos como pueden ser el automotriz, naval, aeronáutico, aéreo-espacial, industrias eólicas; e incluso en aplicaciones recreativas. Generalmente, los materiales compuestos se emplean para mejorar la relación resistencia/peso o rigidez/peso de los elementos estructurales.

Un material compuesto es un material constituido por distintos constituyentes o fases. Cada una de estas fases puede considerarse uniforme, con propiedades constitutivas conocidas. A pesar de que el número de constituyentes pueda ser muy grande, en el campo de la ingeniería mecánica los materiales compuestos suelen estar formados por un material, llamado refuerzo, inmerso dentro de otro, llamado matriz.

Según Hashin [1], hay dos aspectos que determinan las propiedades de un material compuesto: la geometría de las fases y las propiedades físicas de cada una de estas fases. Si consideramos la geometría de las fases, los materiales compuestos se pueden clasificar en materiales particulados, en los que la fase de refuerzo se encuentra en forma de partículas, o en materiales fibrosos, en los que el refuerzo se encuentra en forma de fibras. Estas fibras pueden ser cortas y tener una orientación aleatoria o pueden ser largas y tener una orientación específica. En este trabajo se tratarán principalmente los materiales compuestos reforzados con fibras largas.

### 3.1.1 Fabricación de los materiales compuestos

Los materiales compuestos de fibras largas suelen estar constituidos por fibras de carbono o fibras de vidrio embebidas en una resina plástica. Las fibras son rígidas y de gran resistencia, siendo las encargadas de transportar las cargas a las que está sometida la estructura. En cambio, la matriz presenta una baja rigidez y resistencia, dando forma al material compuesto y, también, transfiriendo la carga a las fibras y entre ellas, siendo ésta su principal labor.

Si bien existen diferentes tipos de compuestos con fibra larga, como los perfiles pultrusionados donde la fibra constituye un refuerzo unidireccional, en este trabajo nos centraremos en laminados multidireccionales dado que es la topología más general de compuestos fibro-reforzados y que incluye a los unidireccionales.

Una capa de material compuesto tiene un espesor que oscila entre 0.05 y 0.2 mm, por tanto, para poder obtener componentes válidos para la ingeniería mecánica, se deberán unir varias capas para crear una lámina, como se puede ver en Fig. 3.1. Una lámina con fibras en una sola dirección se llama lámina unidireccional. Normalmente, para crear un laminado, se usarán láminas con fibras en diferentes direcciones. Las direcciones de la fibra en cada una de las partes del material componente serán elegidas por el diseñador para dar al material compuesto una mejor eficacia en coste o peso.

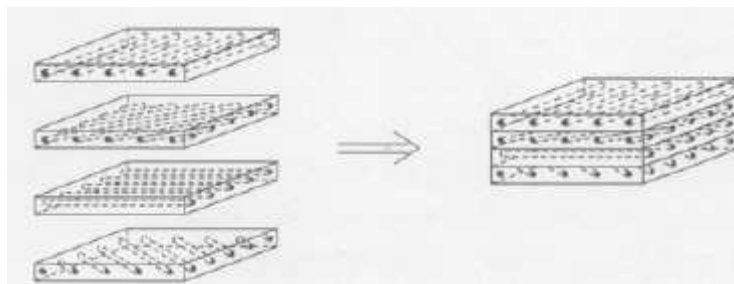


Fig. 3.1 – Laminado (derecha) formado por el apilado de láminas simples (izquierda) [2].

Uno de los métodos básicos de fabricación de laminados es extender las fibras, que normalmente se proporcionan en rollos, sobre un molde siguiendo la

secuencia de apilado definida en el proceso de diseño. Después, se vierte la resina mezclada con aditivos de curado y, en algunos casos, con aditivos que mejoran las propiedades mecánicas de la matriz tales como el agregado de nanopartículas. El vertido de la resina sobre las fibras se puede hacer de distintas formas: a mano (la resina se vierte sobre las capas de fibras mediante métodos manuales) o automáticamente, usando un proceso de vacío llamado “*Resin Transfer Moulding*” (RTM). También existen algunos tejidos de fibras (llamados *pre-pegs*) pre-impregnados con una pequeña cantidad de resina empapando las fibras, que permiten obtener altas fracciones volumétricas de fibras en el material. Finalmente, la resina deberá fraguar (proceso de curado) durante un tiempo a unas condiciones térmicas y de presión controladas hasta su solidificación. Normalmente, diferentes procesos constructivos llevan a pequeñas diferencias en las características mecánicas, incluso usando los mismos constituyentes. Estas diferencias están relacionadas con la proporción volumétrica de fibras que se consiga o con la presencia de micro-vacíos. Por ejemplo, la combinación de un proceso RTM con el control de la presión en la resina durante el curado puede reducir enormemente, o incluso eliminar, los vacíos o micro-burbujas de aire producidas por una distribución no uniforme de la resina.

### 3.1.2 Definición del Elemento de Volumen Representativo (RVE)

La descripción matemática de un fenómeno disipativo en la mecánica de sólidos requiere una formulación de la mecánica de los medios continuos consistente con los principios de la termodinámica. Esta teoría se llama comúnmente ‘termomecánica’ o ‘termodinámica del continuo’ [3]. Esta teoría postula la existencia de un Elemento de Volumen Representativo (RVE, *Representative Volume Element*) que se puede definir como “la porción más pequeña de material que contiene todas las peculiaridades del compuesto, y que por lo tanto es representativa del material en su conjunto. Las tensiones y deformaciones son no-uniformes en el RVE porque el compuesto es material heterogéneo. Sin embargo, el volumen ocupado por el RVE puede ser reemplazado por un material homogéneo equivalente sin afectar el estado de tensiones alrededor del RVE” [4]. El material se considera uniforme y el concepto de continuo [5] puede ser aplicado.

### 3.1.3 Micro, meso y macro escalas

En la mecánica de materiales compuestos se pueden tener en consideración diferentes longitudes de escala. Algunos modelos se construyen bajo el punto de vista de una sola de estas escalas. No obstante, en muchos casos, es necesario relacionar eventos que pasan en escalas diferentes. Normalmente se consideran



las siguientes tres escalas, aunque se puedan llegar a considerar más en modelos multi-escala.

Micro-escala: Esta es la escala que se encuentra al nivel de la heterogeneidad (inclusiones, fibras, etc.) en la que cada material constituyente es homogéneo y la interacción entre ellos se analiza teniendo en cuenta sus campos tenso-deformacionales. Esta escala proporciona datos útiles para simular efectos como el despegue fibra-matriz, daño, plasticidad, fatiga, etc. mediante modelos homogéneos para materiales simples.

Meso-escala: Algunos modelos deben tratar con grupos de fibras o con láminas (en compuestos reforzados con fibras largas). Este nivel de escala intermedio se suele llamar meso-escala. Diferentes modelos computacionales de elementos finitos [6] [7] [8] trabajan con estas escalas para considerar un grupo de fibras; entonces, el tamaño de un elemento finito definirá la longitud de escala.

Macro-escala: Esta es la escala de la estructura completa o del componente mecánico que está en estudio.

La longitud de escala involucrada en los distintos niveles de escala normalmente presenta grandes variaciones. Por esta razón, el trabajo de mallar una macro-estructura con micro-detalles es difícilmente factible. Para solucionar este problema se ha aplicado el concepto de homogeneidad equivalente, desarrollándose distintas técnicas de homogeneización para obtener modelos constitutivos que puedan trabajar adecuadamente a nivel macroscópico.

### **3.1.4 El concepto de la homogeneidad equivalente**

Aunque las propiedades y el comportamiento de un material dependen fuertemente de su micro-escala, la mayoría de los problemas ingenieriles deben resolverse a nivel de la macro-escala. Las propiedades macroscópicas de un material pueden obtenerse experimentalmente. No obstante, también es de interés relacionar el comportamiento global con el comportamiento más detallado que se obtiene a nivel micro-estructural, y que conducirá a un conocimiento más profundo del material, pudiéndose reducir los costes experimentales.

Los materiales compuestos son altamente heterogéneos a nivel micro-estructural. Pero el hecho de resolver un macro-problema teniendo en cuenta la cantidad de información relacionada con la micro-estructura, acaba siendo una tarea prácticamente imposible. La forma más habitual de salvar esta dificultad es considerar un material homogéneo equivalente. Se considera que este material homogéneo equivalente tiene las propiedades promedio del material heterogéneo, por lo que los cálculos se podrán hacer en éste, evitando la compleja estructura interna del material heterogéneo.

El desarrollo de métodos que permitan obtener las propiedades promedio es uno de los temas históricos de la mecánica de los materiales compuestos.

## **3.2 Simulación numérica de materiales compuestos**

### **3.2.1 Diseño mecánico de estructuras de materiales compuestos**

El criterio de diseño habitual para materiales compuestos se basa en procurar alinear las fibras en la dirección de la carga crítica de la estructura. Aún así, el comportamiento del material compuesto en la dirección transversal o en el plano perpendicular también es importante, al usarse también capas perpendiculares en el laminado. Por ello, es importante que el modelo numérico reproduzca adecuadamente no sólo el comportamiento del compuesto en la dirección paralela a las fibras, sino también en la dirección transversal o dirección en que los materiales componentes se comportan como dispuestos en serie.

Todavía hay muchos fenómenos relacionados con los materiales compuestos sujetos a estudio por muchos investigadores. Estos fenómenos pueden ser macroscópicos como el daño (pérdida de resistencia o rigidez) y la fatiga (pérdida de resistencia bajo cargas cíclicas) y también pueden ser microscópicos como la delaminación (pérdida de adherencia entre láminas), el deslizamiento fibra-matriz (pérdida de adherencia entre la fibra y la matriz) o rotura de la matriz. La principal dificultad que se encuentra es que, normalmente, estos fenómenos pueden darse en el mismo instante y pueden estar relacionados entre ellos: la fatiga, por ejemplo, depende de todos ellos, siendo la predicción del comportamiento de los compuestos bajo cargas cíclicas uno de los principales temas de investigación en la ciencia de materiales. Aún más, el daño puede interpretarse como una consecuencia de la combinación de la rotura de la matriz, el deslizamiento fibra-matriz y la delaminación, en diferentes instantes del proceso de carga.

En el estudio de nuevos materiales compuestos, los modelos micro-mecánicos son los más deseables ya que éstos proporcionan un mejor conocimiento de los mecanismos físicos que envuelven el proceso. Los micro-modelos clásicos consideran distribuciones regulares de las fibras que conducen a considerar diferentes celdas unitarias periódicas. Estos modelos periódicos han logrado buenos resultados parciales pero todavía dependen de la geometría elegida [9]. Un análisis más detallado de estos fenómenos en la micro-escala debería considerar también la naturaleza aleatoria de los materiales compuestos [10]. Esta consideración queda fuera del enfoque del presente trabajo, pero debería tenerse en cuenta para una futura mejora del modelo propuesto.

Por otro lado, debido a la enorme diferencia de longitud que suele haber en las escalas que afectan al problema, es imposible, por ejemplo, crear una malla de elementos finitos que represente de forma precisa la micro-estructura y que permita, a la vez, la solución numérica del problema estructural a nivel macroscópico, en un tiempo razonable con los ordenadores de hoy en día.

Actualmente, hay todavía una fuerte necesidad en la industria de modelos fiables que puedan ayudar a diseñar estructuras de materiales compuestos (a nivel de macro-escala) y, simultáneamente, tengan en cuenta los efectos micro-mecánicos de los componentes que presenten un comportamiento no lineal con degradación del material (a nivel de micro-escala).

### **3.2.2 Simulación numérica**

Es imprescindible, en la mayoría de aplicaciones ingenieriles, reproducir de forma precisa el comportamiento macroscópico global de medios heterogéneos. Por otro lado, la precisión y predictibilidad de las simulaciones numéricas dependen de que se haga una descripción realista del comportamiento material, eligiendo de manera apropiada el modelo constitutivo y el criterio de fallo.

La modelación numérica de los materiales compuestos se puede abordar de dos posibles formas: micro- y macro-mecánicamente. Con un enfoque macro-mecánico, el comportamiento del material compuesto se obtiene promediando un conjunto de propiedades similares a las que tendría un material homogéneo. Del mismo modo, un criterio global de fallo (alguno de estos descritos en la sección 3.4) se puede obtener con este enfoque (Tsai-Wu, Hoffman, etc. [11]). Un análisis macro-mecánico proporciona modelos relativamente sencillos que son capaces de considerar la anisotropía, pero incapaces de reproducir algunos fenómenos relacionados con los materiales constituyentes y su interfaz. Dichos modelos suelen estar restringidos al campo elástico lineal y únicamente se puede definir un único criterio de fallo. Otra desventaja importante es que la obtención de las propiedades del compuesto requiere realizar nuevos ensayos experimentales cada vez que se hacen modificaciones en el material, durante el proceso de diseño; por ejemplo, realizar medidas experimentales en un número de materiales de prueba, para obtener diferentes propiedades, variando las fracciones volumétricas y las historias de carga es un trabajo caro bajo consideraciones de tiempo y económicas.

El enfoque micro-mecánico se basa en la combinación de una teoría de composición, como puede ser la teoría de mezclas o cualquier otra teoría de homogeneización, junto con un criterio de fallo apropiado para cada fase componente (Von Mises, Mohr-Coulomb, Drucker-Prager, etc.). Los modelos micro-mecánicos que definen el comportamiento de los materiales componentes deben ser capaces de simular la respuesta no lineal, dando un marco de trabajo

termodinámicamente consistente para reproducir el daño y la plasticidad en el material compuesto.

La velocidad de la simulación numérica de una estructura de materiales compuestos, usando la teoría de mezclas, es varias veces superior a la que se obtiene usando la teoría de homogeneización. Esto es debido a que un proceso de homogeneización requiere la solución del RVE (normalmente usando una malla de elementos finitos) en la micro-escala, para cada punto de integración de la macro-escala. No obstante, este análisis a doble escala es necesario en el caso de unidades elementales complejas, usualmente requiriendo una paralelización del código [12].

Se debe hacer mención también a que el (micro o macro) modelo del material compuesto, que es válido para una única lámina, se suele combinar con la teoría clásica de laminado para describir laminados constituidos por capas unidireccionales reforzadas con fibras.

### **3.3 Modelos constitutivos para materiales compuestos**

Varias técnicas de homogeneización han sido desarrolladas para obtener un modelo constitutivo adecuado para su inserción a nivel macroscópico. Se han llevado a cabo estudios analíticos y numéricos del comportamiento de los materiales compuestos tanto con un enfoque macromecánico (fenomenológico) como micromecánico (físico). En el presente apartado, los principales modelos para materiales compuestos se clasifican según si su enfoque es macro, micro o de multi-escala (empleando más de una escala). También se hará referencia a los enfoques computacionales y a los investigadores que han definido cotas para propiedades efectivas de los materiales compuestos. Un estado del arte detallado sobre modelos numéricos para compuestos de matriz metálica se puede encontrar en Llorca [13].

#### **3.3.1 Métodos macro-mecánicos**

Estos métodos formulan el comportamiento del material compuesto como el de un material simple homogéneo. Pueden considerar la anisotropía del material de forma global. Por ejemplo, se han formulado modelos de plasticidad ortótropa, para simular el comportamiento no lineal, basados en el criterio de fluencia de Hill.

Otros autores hacen uso de la micro-mecánica para establecer criterios de fluencia para la matriz con una restricción en la dirección del refuerzo embebido. El

resultado final es un macro-modelo homogéneo para compuestos que considera la plasticidad anisótropa restringida por la fibra, tal como el modelo “*Vanishing Fiber Diameter*”. Ambos modelos se describen brevemente a continuación.

*a) Modelo de plasticidad de Hill*

Hill [14] propuso en 1948 un criterio de fluencia ortótropo para explicar la plasticidad anisótropa en metales. La superficie de fluencia de Hill se suele usar junto con la regla del flujo asociado y unas leyes de endurecimiento adecuadas. Diferentes autores han aplicado el criterio de Hill en análisis elasto-plásticos de materiales compuestos reforzados con fibras, a pesar de que este criterio considera que el material nunca falla bajo presiones hidrostáticas e ignora el efecto Bauschinger (no tiene en cuenta el endurecimiento cinemático). Este criterio fue usado por primera vez por Griffin *et al.* [15] para modelar la plasticidad ortótropa de laminados simétricos y láminas compuestas por una matriz metálica reforzada unidireccionalmente. Otros investigadores han reducido el número de parámetros independientes del material, que requiere la superficie de fluencia de Hill, para tener en cuenta la simetría transversal isótropa del material [16] [17] o, también, asumiendo un comportamiento lineal en la dirección axial [18]. Comúnmente, se utilizan leyes de endurecimiento escalar, aunque otra opción puede ser el uso de las curvas tensión-deformación de Ramberg-Osgood [19].

Nótese que consideraciones micromecánicas y experimentales indican que no siempre es posible definir una superficie de fluencia global para todo el laminado [20] y que el uso de reglas de flujo asociadas en este contexto es cuestionable [21].

Asimismo, también es importante destacar que expresiones matemáticas equivalentes a la superficie de fluencia de Hill suelen usarse para predecir fallo en compuestos a nivel del laminado, aunque describan un fenómeno físico distinto a la fluencia plástica. Éstas se conocen como el criterio de Tsai-Hill y normalmente se encuentran implementadas en varios códigos comerciales de elementos finitos (por ejemplo, ABAQUS, ANSYS, NASTRAN). Estos criterios se pueden emplear para predecir el límite elástico, pero su uso no es adecuado una vez superado este umbral.

Otros modelos macroscópicos para laminados compuestos basados en el enfoque de Hill se pueden encontrar en [22] y [23].

*b) Modelo “Vanishing Fibre Diameter”*

En 1982, Dvorak & Bahei-El-Din [24] propusieron una serie de relaciones constitutivas simples, basadas en la micromecánica, para modelar el

comportamiento no lineal de los materiales compuestos en los que una matriz elasto-plástica es reforzada con fibras elásticas, continuas y alineadas. Bajo cualquier carga multiaxial, las fibras contribuirán únicamente en su dirección axial al no haber ninguna interacción entre los componentes en la dirección transversal. Por este motivo, el modelo es conocido como modelo con fibra de diámetro invisible (VFD, *Vanishing Fibre Diameter*).

El principal inconveniente de este modelo es su tendencia a infravalorar la rigidez transversal y de cortante, así como la mala predicción de la plasticidad cuando la fracción volumétrica de fibras es moderada o alta, en el caso de aplicar cargas transversales. El modelo VFD no es apropiado para análisis térmicos; por lo tanto, en caso de tener cargas térmicas, es necesario un trabajo teórico adicional. También es necesario realizar modificaciones en el modelo para poder tener en cuenta fibras extensibles plásticamente o matrices perfectamente plásticas.

La implementación del modelo VFD en un código de elementos finitos se describe en Bahei-El-Din *et al.* [25] y un análisis en tres dimensiones se puede encontrar en Svobodnik *et al.* [26]. Voyiadjis & Kattan [27] [28] han incorporado el daño en este modelo para estudiar mecanismos de daño asociados a deformaciones plásticas.

### 3.3.2 Métodos micro-mecánicos

Estos métodos determinan las relaciones constitutivas haciendo una serie de hipótesis sobre los campos de tensiones y deformaciones a nivel de micro-escala y resolviendo analíticamente el problema elástico. La primera aproximación a este tipo de métodos es la que aparece en los métodos de campo promedio (MFM, *mean field methods*), éstos incluyen la teoría de mezclas, los modelos tipo Eshelby y los métodos auto-consistentes (*self-consistent methods*). Algunas revisiones sobre estos métodos son las realizadas por Böhm [29] y Li [30]. Otra aproximación a la solución del problema mediante modelos micro-mecánicos es el método de las celdas (MOC, *method of cells*) y sus derivados.

#### a) *Mean field models*

Los modelos de campo promedio (MFM, *mean field methods*) asumen que los valores promedio de las tensiones y las deformaciones son representativos del comportamiento de cada fase. También se asume que la media de las tensiones y deformaciones en las fases están relacionadas con las tensiones y deformaciones efectivas (o del compuesto), mediante ciertas funciones de influencia mecánica llamadas “tensores de concentración”. Estas funciones dependen de la forma (partículas, fibras cortas o fibras largas), la distribución espacial y la fracción volumétrica del refuerzo.

### Teoría de Mezclas

Las primeras aplicaciones de los MFM para calcular las constantes elásticas de materiales compuestos se remontan a Voigt [31] y Reuss [32], los cuales supusieron que los campos de tensiones y de deformaciones son, respectivamente, constantes en cada una de las fases. Éstos desarrollaron formulaciones simples actualmente llamadas regla de mezclas (ROM, *Rule of Mixtures*), y regla de mezclas inversa (iROM, *inverse Rule of Mixtures*). Las propiedades globales se calculan como la media de las propiedades de cada uno de los constituyentes, ponderadas por su fracción volumétrica pero resultan independientes de la geometría de la fase o de su distribución espacial. Este enfoque tiene en cuenta una sola característica micro-estructural: la fracción volumétrica de cada una de las fases; luego, su uso queda justificado únicamente para obtener de forma rápida una estimación de las características lineales elásticas del material (por ejemplo, su módulo elástico). No obstante, la ROM constituye el punto de partida para muchos otros métodos hasta lograr modelar el comportamiento no lineal que muestran muchos materiales compuestos debido a las deformaciones plásticas y de fluencia de la matriz. Las investigaciones pioneras de Taylor [33], Bishop & Hill [34] y Drucker [35] en plásticos ideales policristalinos y compuestos pueden ser consideradas los equivalentes no lineales a las cotas establecidas por Voigt y Reuss para los sistemas lineales elásticos.

En 1960, Truesdell y Toupin propusieron por primera vez la teoría de mezclas clásica (CMT, *classical mixing theory*) basada en la ROM; estableciendo las bases de trabajos posteriores (ver sección 3.4). La CMT permite la simulación de comportamientos no lineales del material, bajo una hipótesis de iso-deformación (todos los componentes que coexisten en un mismo punto del material se encuentran bajo el mismo campo de deformaciones). Esta hipótesis es una gran limitación para reproducir de forma precisa el comportamiento de los materiales compuestos, que normalmente se encuentran entre los estados de iso-deformación (paralelo puro) e iso-tensión (serie puro). Varios autores han intentado resolver este problema desde distintos enfoques pero, desafortunadamente, estos modelos no son todo lo generales que se desearía para representar correctamente el comportamiento de los compuestos reforzados con fibras (ver la sección 3.4 para detalles).

Enmarcado en el enfoque de los métodos de campo promedio (*mean-field methods*), este documento propone una formulación simple y precisa para modelar, específicamente, el comportamiento no lineal de laminados reforzados con fibras largas. Esta formulación plantea combinar (o componer) los comportamientos de materiales simples (homogéneos) con el objetivo de obtener la respuesta mecánica del material compuesto (heterogéneo). Para ello, propone una gestión adecuada de los modelos constitutivos (homogéneos), ya existentes, de cada uno de los materiales componentes; aprovechándose de esta manera el gran desarrollo

conseguido en el campo de la modelización constitutiva de materiales simples, y permitiendo la transferencia de toda esta tecnología al campo de los materiales compuestos. Este modelo se planteó inicialmente para tratar con componentes con plasticidad aditiva y/o con daño en la rigidez elástica –Rastellini & Oller (2004) [36]–. La versión generalizada, que se presenta en el presente trabajo, puede componer materiales que presenten cualquier tipo de no linealidad (daño, plasticidad, fatiga, fluencia, envejecimiento, etc.). La convergencia del método es cuadrática cuando se proporcionan los tensores tangentes para cada una de las fases componentes del modelo. El método ha sido aplicado para la predicción de la fatiga en laminados reforzados con fibras de carbono en Salomón *et al.* (2005) [37].

### Modelos tipo Eshelby

Eshelby [38] [39] desarrolló en 1956 un método para calcular los tensores de concentración para una inclusión elipsoidal embebida en una matriz infinita. No obstante, en la mayoría de los casos, la fracción volumétrica del refuerzo es comparable a la de la matriz y, por tanto, la interacción de los campos elásticos entre inclusiones vecinas deberá tenerse en cuenta. Varios modelos tipo Eshelby se han desarrollado con este propósito. El más popular es el método de Mori-Tanaka [40] [41], que está especialmente indicado para materiales con una topología del tipo inclusión/matriz.

### Modelos auto-consistentes

Una aproximación similar es el método auto-consistente (*self-consistent method*), propuesto inicialmente por Kröner [42] para estudiar la plasticidad cristalina. Éste supone que cada inclusión de refuerzo está embebida en un material continuo cuyas propiedades efectivas corresponden a las del compuesto. Este modelo fue desarrollado posteriormente por varios autores, como, Hashin (1962) [43], Hashin y Shtrikman (1963) [44], Budiansky (1965) [45], Hill (1965) [46], Christensen y Lo (1979) [47], Hashin (1983) [48].

El modelo de Christensen y Lo es una versión generalizada del método auto-consistente, en la que el refuerzo está inmerso en una matriz que, a su vez, está embebida en un material continuo cuyas propiedades efectivas son las del compuesto. Expresiones analíticas han sido derivadas para las constantes elásticas de materiales compuestos reforzados con fibras continuas y con partículas esféricas.



### **b) Método de las celdas**

A finales de los ochenta, Aboudi [49] desarrolló una aproximación micromecánica al problema que se conoce como método de las celdas (MOC, *Method of Cells*). Éste considera una distribución matricial periódica de fibras para modelar el comportamiento termomecánico de compuestos con fibras unidireccionales. Se considera una celda unidad cuadrada que a su vez se divide en 4 subceldas, tres de ellas con un comportamiento de matriz y la cuarta con características de fibra. El MOC estándar emplea una expansión lineal de los desplazamientos en cada una de las subceldas, las caras de las cuales tienen continuidad en las tracciones y los desplazamientos promedios. Estas ecuaciones de equilibrio, junto con las relaciones constitutivas de los constituyentes, permiten obtener los coeficientes de expansión para evaluar las tensiones y deformaciones a escala microscópica y global. La macro respuesta, transversalmente isótropa, del compuesto se obtiene mediante un proceso de promediación, en el cual el módulo elástico se obtiene mediante fórmulas analíticas [50].

El método de las celdas generalizado (GMC, *Generalized Method of Cells*) [51], es una extensión del método estándar que permite partir la celda unidad en un mayor número de subceldas, que permitirán generar microestructuras más complejas [52]. En [53] se indica una mejora, respecto del MOC, en las expansiones de los desplazamientos.

El comportamiento no lineal puede ser tenido en cuenta combinando el MOC con un modelo constitutivo apropiado para la matriz. La relativa simplicidad del modelo, comparado con otros enfoques basados en la celda unitaria, lo hace también apropiado para manejar las escalas más bajas de los modelos multiescala.

### **3.3.3 Métodos de homogeneización (o multi-escala)**

Los métodos de homogeneización son conocidos también como micro-macro modelos ya que éstos obtienen el comportamiento del material heterogéneo a nivel de macro-escala resolviendo un problema en doble escala. Algunos modelos utilizan incluso múltiples escalas a pesar de su alto coste computacional. Muchos de los enfoques basados en la homogeneización hacen una asunción global de periodicidad en la microestructura, considerando que toda la macro-estructura consiste en celdas unitarias repetidas espacialmente.

Una aproximación matemática es la teoría de homogeneización asintótica, documentada en Bensoussan *et al.* [54], Sanchez-Palencia [55] y Sanchez-Hubert [56]. Este método considera una expansión asintótica de los campos de desplazamientos y tensiones para aproximar su respectiva distribución macroscópica. La conexión entre la micro y la macro escala se realiza usando

principios variacionales; ver, por ejemplo, Tolenado & Murakami [57], Devries *et al.* [58], Guedes & Kikuchi [59], Hollister & Kikuchi [60] and Fish *et al.* [61]. La homogeneización asintótica proporciona una estimación efectiva de las propiedades globales, así como valores de tensiones y deformaciones locales; no obstante, suele estar restringida a microestructuras muy simples y modelos materiales también simples, normalmente en el campo de las pequeñas deformaciones.

El planteamiento mediante el método de la celda unitaria es otra técnica de homogeneización ampliamente utilizada. Las propiedades efectivas del material se determinan resolviendo una serie de relaciones constitutivas macroscópicas que usan los resultados de un modelo de detalle de una única RVE (normalmente mediante el método de los elementos finitos), como ejemplo se puede ver Christman *et al.* [62], Tvergaard [63], Bao *et al.* [64], Brockenbrough *et al.* [65], Nakamura & Suresh [66], McHugh *et al.* [67], Smit *et al.* [68] y van der Sluis *et al.* [69]. Los métodos de la celda unitaria pueden tratar fácilmente morfologías micro-estructurales complejas. Pero, como usan el comportamiento de una única RVE sujeta a una cierta historia de cargas para formular las ecuaciones constitutivas macroscópicas, su uso queda restringido a pequeñas deformaciones y comportamientos materiales simples. Se obtienen resultados erróneos en caso de aplicar el método a problemas de grandes deformaciones o a problemas con comportamientos constitutivos no lineales e histórico-dependientes.

Para superar esta limitación han aparecido diferentes modelos micro-macro directos. Éstos no proporcionan directamente un modelo constitutivo válido para toda la estructura sino que evalúan la relación tensión-deformación en un punto, macroscópico, analizando externamente la RVE asignada a dicho punto. Hay diferentes formas de evaluar el comportamiento de la micro-escala; la mayoría de los investigadores usan el método de los elementos finitos (v.g. Terada & Kikuchi [70], Smit *et al.* [71] [72], Miehe *et al.* [73], Michel *et al.* [74] [75], Feyel & Chaboche [76], Zalamea [77] [78]), aunque también se puede usar el método de la celda de Voronoi (v.g. Ghosh *et al.* [79] [80]) o una aproximación mediante series de Fourier (v.g. Moulinec & Suquet [81]). Para conectar el nivel micro con el macro, estos métodos usan las ideas de la teoría de homogeneización asintótica, o realizan un promedio volumétrico. El principal inconveniente de un análisis micro-macro es la cantidad de tiempo computacional necesario. No obstante, Terada & Kikuchi [82] han propuesto una estrategia llamada “*data-base strategy*” para reducir el coste computacional, que ha sido posteriormente desarrollada por Lee & Ghosh [83].

### 3.3.4 Cotas de las propiedades efectivas

Algunos investigadores, en lugar de buscar explícitamente las propiedades efectivas del material, establecen unas cotas superior e inferior para éstas. Las cotas de Voigt (enfoque iso-deformacional) y de Reuss (enfoque iso-tensional) son las más sencillas. La única información que se requiere sobre la distribución del refuerzo es su fracción volumétrica. Hashin & Shtrikman [84] encontraron unas cotas más cercanas suponiendo una distribución estadística homogénea. Estas cotas pueden mejorarse considerando un mayor número de datos estadísticos. Vale la pena mencionar algunos de los autores en este campo: Willis & Talbot [85] [86] [87], Drugan & Willis [88], Ponte Castañeda [89] y Torquato [90] [91].

### 3.3.5 Enfoques computacionales

La evolución de los ordenadores ha abierto caminos a procesos que eran inimaginables en décadas anteriores. Algunos grupos de investigación han logrado encontrar el comportamiento macroscópico de un material resolviendo el problema con detalles a micro-escala. Este enfoque se usa principalmente para resolver problemas en los que no existe ningún tipo de solución analítica, como puede ser el caso de inclusiones no periódicas. Como ejemplo, se pueden ver los trabajos realizados por Ostoja-Starzewski *et al.* [92] [93] [94], Borbély [95], Kanit [96], Buryachenko [97], Byström [98], Graham [99], Knight [100].

## 3.4 Evolución de la teoría de mezclas

En esta sección se revisará, brevemente, la evolución de la teoría de mezclas desde su formulación clásica hasta los desarrollos más recientes. Se hará mención, también, de los puntos débiles de los distintos desarrollos que han motivado la mejora de los mismos.

### 3.4.1 Teoría de mezclas clásica

En 1960, Truesdell & Toupin [101] enunciaron la teoría de mezclas clásica (CMT, *classical mixing theory*). Sus estudios establecieron las bases de trabajos posteriores: (Green & Naghdi, 1965 [102]) (Ortiz & Popov, 1982 [103] [104]) (Oller *et al.*, 1996 [105]). La teoría de mezclas para sustancias básicas tiene como base la mecánica del sólido continuo local, adecuada para explicar el comportamiento de un punto volumétrico del material en un sólido compuesto. Dicha teoría está basada en el principio de interacción de sustancias componentes que constituyen el material, suponiendo las siguientes hipótesis: i) para cada volumen infinitesimal de material compuesto, existe un número finito de sustancias componentes que

contribuyen al comportamiento del compuesto; ii) cada sustancia participa en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica; iii) todos los componentes cumplen la ecuación de compatibilidad cinemática. Por lo tanto, en cada punto material sólido continuo compuesto, todas las sustancias componentes contribuyen simultáneamente, con sus propias leyes constitutivas (que pueden ser anisótropas y no lineales), en el comportamiento global en función de su fracción volumétrica.

La CMT asume que todos los componentes que coexisten en un punto del material se encuentran bajo el mismo estado de deformación (hipótesis de iso-deformación). Consecuentemente, la CMT se puede aplicar únicamente a materiales compuestos que presenten un comportamiento puramente paralelo. En este caso, el campo de tensiones globales se obtiene de la adición de las tensiones ponderadas de cada uno de los componentes.

### 3.4.2 Teoría de mezclas generalizada

La hipótesis de iso-deformación de la CMT es una gran limitación para la correcta simulación del comportamiento de los materiales compuestos, que normalmente poseen un estado mixto de iso-deformación (estado puramente paralelo) y de isotensión (puramente en serie). Varios autores han intentado resolver este problema de distintas formas: Oller *et al.* (1995) [106], Oñate *et al.* (1997) [107] y Neamtu *et al.* (1997) [108] propusieron una generalización de la CMT para tener en cuenta la respuesta serie-paralelo mediante el empleo de una ecuación de cierre alternativa con parámetros de ajuste para poder interpolar los dos comportamientos extremos. La determinación de los parámetros requeridos precisa de muchos datos experimentales y de un complejo proceso de calibración que motivaron la búsqueda de caminos alternativos. Otro enfoque, usado por Car (2000) [109] [110] y Mayugo *et al.* (2002) [111], consiste en usar la ecuación de cierre original modificando las propiedades transversales de los componentes para ajustar la rigidez global del compuesto. Para evitar alterar las propiedades mecánicas de los componentes, Oller [112] propuso en 2003 una ecuación de cierre mejorada que relaciona los estados tensionales del compuesto y sus componentes. Este modelo usa un parámetro, para interpolar entre el comportamiento puramente en serie y puramente en paralelo, dependiente de la dirección de la carga. El comportamiento en paralelo se obtiene cuando la carga se aplica en la dirección de las fibras mientras que la respuesta en serie se obtiene cuando la carga está aplicada perpendicularmente a las fibras. El principal inconveniente de este método es su dependencia del estado de carga.

### 3.4.3 Modelos serie-paralelo avanzados

Para superar las limitaciones de los modelos previos, Rastellini *et al.* [113] [114] han reformulado la CMT dando lugar a una teoría de mezclas serie-paralelo mejorada (ASPMT, *Advanced Serial-Parallel Mixing Theory*), más general y versátil, capaz de capturar automáticamente el comportamiento múltiple de cada componente dentro del compuesto. El modelo resultante es independiente del estado de cargas, admitiendo cargas multiaxiales que pueden ser en desplazamiento o fuerza controlada. También se obtienen buenos resultados en el rango elástico y en la determinación de la envolvente de fallo del compuesto. No obstante, la estrategia de desacople explícita utilizada es insuficiente para predecir comportamientos fuertemente no lineales.

El presente trabajo propone una formulación sencilla y depurada que incluye una estrategia iterativa de desacople, para modelar el comportamiento no lineal de laminados reforzados con fibras largas. Esta formulación plantea combinar (o componer) los comportamientos de materiales simples (homogéneos) con el objetivo de obtener la respuesta mecánica del material compuesto (heterogéneo). Para ello, propone una gestión adecuada de los modelos constitutivos (homogéneos), actualmente disponibles, de cada uno de los materiales componentes; aprovechándose de esta manera el gran desarrollo conseguido en el campo de la modelización constitutiva de materiales simples, y permitiendo la transferencia de toda esta tecnología al campo de los materiales compuestos. Este modelo se planteó inicialmente para simular el comportamiento de materiales compuestos cuyos componentes podían ser modelados con plasticidad aditiva y/o daño en la rigidez elástica –Rastellini & Oller (2004) [115]–. La versión generalizada, que se presenta en el presente trabajo, puede componer materiales que presenten cualquier tipo de no linealidad. Este modelo, igual que el anterior, es independiente de la dirección de carga, y permite la aplicación de cargas multiaxiales. Los resultados obtenidos son de alta calidad al compararse con resultados experimentales, tanto en el comportamiento lineal como en el no lineal. El modelo obtiene una estimación excelente de la envolvente de rotura del material compuesto si el criterio de fallo de los materiales componentes se escoge correctamente. Se alcanza convergencia cuadrática cuando se proporcionan los tensores tangentes algorítmicos para cada uno de los componentes de las fases del modelo. El método ha sido aplicado a la predicción de la fatiga en laminados reforzados con fibras de carbono por Salomón *et al.* (2005) [37].

## 3.5 Criterios de fallo en materiales compuestos

El siguiente análisis se centra en los criterios de fallo cuasi-estático aplicados a los laminados de matriz polimérica reforzada con fibras largas. Un criterio de fallo

para compuestos es el que se utiliza para determinar el estado límite de tensión a partir del cual el material compuesto se puede considerar dañado; es decir, que permite establecer si el material romperá bajo un cierto estado de tensiones determinado. La gran cantidad de criterios de fallo formulados pone de manifiesto que todos los criterios tienen alguna carencia que impide su generalización para todos los materiales compuestos, en todas sus aplicaciones o para cualquier estado de carga.

### 3.5.1 Criterios de fallo macro-mecánicos

Los criterios de fallo macro-mecánicos no pueden distinguir el tipo de fallo ni cual es la fase dominante en la fractura, es decir, no pueden tener en cuenta fenómenos que puedan pasar en la interfaz entre la matriz y la fibra.

Estos criterios utilizan una expresión cuadrática polinomial que permite definir la superficie de fluencia para un material de comportamiento anisótropo. Los parámetros de ajuste de estas expresiones se determinan en el laboratorio mediante pruebas de tracción y compresión uniaxial, en dos direcciones perpendiculares, y mediante pruebas de cortante puro, etc.

En 1971, Tsai & Wu [116] proponen un criterio de fallo ortótropo para compuestos denominado criterio del tensor polinomial (*Tensor Polynomial Criterion*):

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j + F_{ijk} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j \cdot \sigma_k - 1 = 0$$

donde  $i, j, k = 1, \dots, 6$ . Los parámetros  $F_i$ ,  $F_{ij}$  y  $F_{ijk}$  son relativos a la resistencia del laminado en las direcciones principales. Sin embargo, el tensor de tercer orden  $F_{ijk}$  es usualmente ignorado desde un punto de vista práctico debido al gran número de constantes materiales requeridas para su determinación. Por lo tanto, el criterio polinomial se reduce a una expresión cuadrática:

$$F_i \cdot \sigma_i + F_{ij} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j - 1 = 0$$

donde  $i, j = 1, \dots, 6$ . Considerando que la resistencia a cortante no es dependiente del signo, todos los términos referentes a tensiones cortantes de primer orden pueden despreciarse:  $F_4 = F_5 = F_6 = 0$ . De este modo la forma explícita para la expresión general resulta:

$$\begin{aligned} &F_1 \sigma_1 + F_2 \sigma_2 + F_3 \sigma_3 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + \\ &+ F_{11} \sigma_1^2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{33} \sigma_3^2 + F_{44} \sigma_4^2 + F_{55} \sigma_5^2 + F_{66} \sigma_6^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Existen otros criterios de fallo cuadráticos como los propuestos por Tsai-Hill [117], [118], Azzi-Tsai [119], Hoffman [120] y Chamis [121]. Todos estos pueden

ser representados mediante los términos del criterio general de Tsai-Wu variando los parámetros  $F_i$  y  $F_{ij}$  para obtener un mejor ajuste de los resultados experimentales. Mayugo [122] resume los parámetros característicos de algunos de estos criterios polinominales en la siguiente tabla.

	Tsai-Wu	Tsai-Hill (*)	Azzi-Tsai (*)	Hoffman	Chamis(*,†)
$F_1$	$\frac{1}{\sigma_{1T}^u} - \frac{1}{\sigma_{1C}^u}$	0	0	$\frac{1}{\sigma_{1T}^u} - \frac{1}{\sigma_{1C}^u}$	0
$F_2$	$\frac{1}{\sigma_{2T}^u} - \frac{1}{\sigma_{2C}^u}$	0	0	$\frac{1}{\sigma_{2T}^u} - \frac{1}{\sigma_{2C}^u}$	0
$F_3$	$\frac{1}{\sigma_{3T}^u} - \frac{1}{\sigma_{3C}^u}$	0	0	$\frac{1}{\sigma_{3T}^u} - \frac{1}{\sigma_{3C}^u}$	0
$F_{12}$	$\frac{-1}{2\sqrt{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u \sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u}}$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_1^{u^2}} + \frac{1}{\sigma_2^{u^2}} - \frac{1}{\sigma_3^{u^2}} \right)$	$\frac{-1}{\sigma_1^{u^2}}$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u} + \frac{1}{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u} - \frac{1}{\sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u} \right)$	$\frac{-K_{12}}{\sigma_1^u \sigma_2^u}$
$F_{13}$	$\frac{-1}{2\sqrt{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u \sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u}}$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_3^{u^2}} + \frac{1}{\sigma_1^{u^2}} - \frac{1}{\sigma_2^{u^2}} \right)$	0	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u} + \frac{1}{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u} - \frac{1}{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u} \right)$	$\frac{-K_{13}}{\sigma_1^u \sigma_3^u}$
$F_{23}$	$\frac{-1}{2\sqrt{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u \sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u}}$	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_2^{u^2}} + \frac{1}{\sigma_3^{u^2}} - \frac{1}{\sigma_1^{u^2}} \right)$	0	$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{2T}^u \sigma_{2C}^u} + \frac{1}{\sigma_{3T}^u \sigma_{3C}^u} - \frac{1}{\sigma_{1T}^u \sigma_{1C}^u} \right)$	$\frac{-K_{23}}{\sigma_2^u \sigma_3^u}$
$F_{11}$	$\frac{1}{\sigma_{1T}^u \cdot \sigma_{1C}^u}$	$\frac{1}{\sigma_1^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_1^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{1T}^u \cdot \sigma_{1C}^u}$	$\frac{1}{\sigma_1^{u^2}}$
$F_{22}$	$\frac{1}{\sigma_{2T}^u \cdot \sigma_{2C}^u}$	$\frac{1}{\sigma_2^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_2^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{2T}^u \cdot \sigma_{2C}^u}$	$\frac{1}{\sigma_2^{u^2}}$
$F_{33}$	$\frac{1}{\sigma_{3T}^u \cdot \sigma_{3C}^u}$	$\frac{1}{\sigma_3^{u^2}}$	0	$\frac{1}{\sigma_{3T}^u \cdot \sigma_{3C}^u}$	$\frac{1}{\sigma_3^{u^2}}$
$F_{44}$	$\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$	0	$\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{23}^{u^2}}$
$F_{55}$	$\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$	0	$\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{13}^{u^2}}$
$F_{66}$	$\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$	$\frac{1}{\sigma_{12}^{u^2}}$

Tabla 3.1 – Criterio de fallo polinomial. Donde  $\sigma_1^u$ ,  $\sigma_2^u$  y  $\sigma_3^u$  son las resistencias normales en las direcciones 1, 2 y 3; y  $\sigma_{23}^u$ ,  $\sigma_{13}^u$  y  $\sigma_{12}^u$  son las resistencias a cortante en los planos 23, 13 y 12. (\*)  $\sigma_1^u$ ,  $\sigma_2^u$  y  $\sigma_3^u$  representan  $\sigma_{1C}^u$ ,  $\sigma_{2C}^u$  y  $\sigma_{3C}^u$ , o bien a  $\sigma_{1T}^u$ ,  $\sigma_{2T}^u$  y  $\sigma_{3T}^u$  dependiendo del signo de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\sigma_3$  respectivamente. (†)  $K_{12}$ ,  $K_{13}$  y  $K_{23}$  son coeficientes que dependen del material [122].

En el 2003, Oller *et al.* [123] proponen una forma general para definir un criterio de fluencia ortótropo. Este criterio considera, para cada dirección de ortotropía, el promedio cuadrático de la tensión de fluencia a tracción y a compresión ( $\hat{f}_x = \sqrt{f_x^t f_x^c}$ ,  $\hat{f}_y = \sqrt{f_y^t f_y^c}$ ,  $\hat{f}_z = \sqrt{f_z^t f_z^c}$ ), además de considerar las tensiones de fluencia a cortante ( $f_{xy}$ ,  $f_{yz}$ ,  $f_{xz}$ ).

$$\left[ \left( \frac{\sigma_x^2}{\hat{f}_x^2} + \frac{\sigma_y^2}{\hat{f}_y^2} + \frac{\sigma_z^2}{\hat{f}_z^2} \right) - \lambda_1 \left( \frac{\sigma_y \sigma_z}{\hat{f}_y \hat{f}_z} \right) - \lambda_2 \left( \frac{\sigma_z \sigma_x}{\hat{f}_z \hat{f}_x} \right) - \lambda_3 \left( \frac{\sigma_x \sigma_y}{\hat{f}_x \hat{f}_y} \right) + \left( \frac{\tau_{yz}^2}{\hat{f}_{yz}^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\hat{f}_{xz}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\hat{f}_{xy}^2} \right) + 2 \left( \alpha_x \frac{\sigma_x}{\hat{f}_x} + \alpha_y \frac{\sigma_y}{\hat{f}_y} + \alpha_z \frac{\sigma_z}{\hat{f}_z} \right) \right] - 1 = 0$$

donde  $\alpha_i = \frac{1}{2} \left[ \left( f_i^c / f_i^t \right) - \left( f_i^t / f_i^c \right) \right]$ , con  $i = x, y, z$ , son coeficientes de ajuste; y  $\lambda_k$  son parámetros que permiten especificar la naturaleza del criterio de fallo.

Este criterio permite describir el límite elástico de varios tipos de materiales, desde geomateriales hasta metales, dependiendo de la elección adecuada de los parámetros  $\alpha_i$  y  $\lambda_k$ .

### 3.5.2 Discusión sobre los criterios de fallo

Se han realizado muchas revisiones que tratan en profundidad los criterios de fallo disponibles en la literatura para los materiales compuestos reforzados con fibras largas, como la llevada a cabo por Paris *et al.* [124], quienes también probaron experimentalmente que hay fenómenos locales ocurridos en la matriz que no pueden ser considerados mediante criterios de fallo polinomiales. En esta línea, Dávila y Camanho [125] han desarrollado recientemente, bajo el nombre de LaRC, un grupo de los criterios de fallo que consideran efectos *in situ*.

La elección apropiada de una función matemática para predecir el fallo (inicial y final) de láminas FRP sigue siendo un tema de mucha discusión entre los principales investigadores en el área de los compuestos. En 1998, ha sido propuesto a la comunidad científica mundial un ejercicio de fallo conocido como “*world-wide failure exercise*”, organizado por Hinton, Soden y colaboradores [126] [127] [128], con el objetivo de determinar la capacidad predictora de las teorías de fallo disponibles en la literatura. El resultado de este estudio fue, que incluso para los casos de prueba aparentemente simples, existe una discrepancia bastante amplia entre las varias predicciones y resultados experimentales; lo que sugiere que el tema de las teorías de fallo está todavía lejos de su madurez.

### 3.5.3 Criterio de fallo empleado en este trabajo

El enfoque propuesto en el presente trabajo, no requiere el empleo de criterios de fallo macroscópicos (o globales) para el compuesto, sino que emplea los criterios de fallo en los componentes. Es decir, que el fallo no es evaluado con el estado de tensiones del material compuesto, sino con los estados de tensiones y/o deformaciones de los materiales componentes, empleando el criterio más



adecuado a cada material componente simple. Como ejemplo, se puede mencionar el criterio de Mohr-Coulomb o Drucker-Prager para matrices plásticas, o el criterio de Von Mises para fibras de vidrio y para matrices metálicas.

La metodología propuesta en el capítulo siguiente, para modelar materiales compuestos, permite la elección del criterio de fluencia (o de daño) que mejor represente el comportamiento de cada material constituyente. El fallo del material compuesto resultará, naturalmente y de manera implícita, de la combinación de los criterios de fallo de sus componentes. Esta metodología es contrastada con criterios de fallo globales y con resultados experimentales en el capítulo de validación (capítulo 6).

## Referencias

- [1] Hashin Z (1983) "Analysis of composite materials - a survey". *Journal of Applied Mechanics*, 50:481-503.
- [2] Kollar LP and Springer GS (2003) "*Mechanics of Composite Structures*". Cambridge University Press.
- [3] Maugin GA (1992) "*The Thermodynamics of Plasticity and Fracture*". Cambridge University Press.
- [4] Barbero E.J. (1998). "*Introduction to composite materials design*". Taylor & Francis, London (UK).
- [5] Malvern LE (1969) "*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*". Prentice Hall.
- [6] Alzebedeh K and Ostoja-Starzewski M (1996) "Micromechanically based stochastic finite elements: length scales and anisotropy". *Probabilistic Engineering Mechanics*, 11:205-214.
- [7] Car E, Zalamea F, Oller S, Miquel J, and Oñate E (2002) "Numerical simulation of composite materials: two procedures". *Int. Journal of Solids & Structures*, 39:1967-1986.
- [8] Feyel F (2003) "A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua". *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192:3233-3244.
- [9] Povirk GL (1995) "Incorporation of microstructural information into models of two-phase materials". *Acta Metallurgica et Materialia*, 43(8):3199-3206.
- [10] Trias D, Costa J, Blanco N, Hurtado JE. (2002). "Análisis estocástico de materiales heterogéneos". *XV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Cádiz.
- [11] Decolon C. (2000). "*Analysis of composite structures*". Paris: Hermes Science Publications.

- [12] Car E, Zalamea F, Oller S, Miquel J, Oñate E. (2002). "Numerical simulation of fiber reinforced composite materials". *Int. Journal of Solids and Structures*. Vol. 39, 1967-1986.
- [13] Llorca J (2001). "Modelling & simulation of metal matrix composites" <http://mmc-assess.tuwien.ac.at/45index.htm>. Dpto. Ciencia de Materiales, Universidad Politécnica de Madrid. [web link]
- [14] Hill R. (1948) "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals" *Proc. Royal Society*, London, v A193, 1948, p 281-297.
- [15] Griffin OH, Kamat MP, Herakovich CT (1981). "Three-dimensional inelastic finite element analysis of laminated composites". *J. Composite Materials*, 15, 543-560.
- [16] Hansen AC, Blackketter DM, Walrath DE (1991). "An invariant-based flow rule for anisotropic plasticity applied to composite materials". *J. Appl. Mech.* 58, 881-888.
- [17] Schmidt RJ, Wang DQ, Hansen AC (1993). "Plasticity model for transversely isotropic materials". *J. Engng. Mech.* 119, 748-766.
- [18] Xie M, Adams DF (1995). "A plasticity model for unidirectional composite materials and its application in modeling composites testing". *Compos. Sci. Technol.*, 54, 11-21.
- [19] Ramberg W. and Osgood WR. (1941). "Determination of stress-strain curves by three parameters", Technical Note No. 503, National Advisory Committee on Aeronautics, (NACA).
- [20] Dvorak GJ (1991). "Plasticity theories for fibrous composite materials"; in: *"Metal matrix composites: mechanisms and properties"* (Eds. R.K.Everett, R.J.Arsenault), pp. 1-77; Academic Press, Boston.
- [21] Banks-Sills L, Leiderman V (1999). "Macro-mechanical material model for fiber reinforced metal matrix composites". *Composites Part B: Engineering*, 30 (5), 443-452.
- [22] Chen JL, Sun CT (1993). "A plastic potential function suitable for anisotropic fiber composites". *J. Compos. Mater.*, 27, 1379-1390.
- [23] Rizzi SA, Leewood AR, Doyle JF, Sun CT (1987). "Elastic-plastic analysis of boron/aluminium composite under constrained plasticity conditions". *J. Composite Materials*, 21, 734-749.

- [24] Dvorak G.J. & Bahei-El-Din Y.A. (1982) "Plasticity analysis of fibrous composites" *Journal of Applied Mechanics*, v 49, n 2, June 1982, p 327-335.
- [25] Bahei-El-Din Y.A., Dvorak G.J., Utku S. (1981) "Finite element analysis of elastic-plastic fibrous composite structures", *Computers & Structures*, v 13, n 1-3, June 1981, p 321-330.
- [26] Svobodnik A.J., Boehm H.J., Rammerstorfer F.G. (1991) "3/D finite element approach for metal matrix composites based on micromechanical models", *International Journal of Plasticity*, v 7, n 8, 1991, p 781-802.
- [27] Voyiadjis G.Z., Kattan P.L. (1993) "Local approach to damage in elastoplastic metal matrix composites", *International Journal of Damage Mechanics*, v 2, n 1, Jan 1993, p 92-114.
- [28] Kattan P.L., Voyiadjis G.Z. (1996) "Damage-plasticity in a uniaxially loaded composite lamina: Overall analysis", *International Journal of Solids & Structures*, v 33, n 4, Feb 1996, p 555-576.
- [29] Böhm HJ (2003) "A short introduction to basic concepts of continuum micromechanics". Technical report, *Institut für Leichtbau und Flugzeugbau*. TU Wien.
- [30] Li S. (2001) "Micromechanics". Graduate course notes (ce236). Technical report, Department of Civil and Environmental Engineering. University of California at Berkeley.
- [31] Voigt W. (1889). "Über die Beziehung zwischen den beiden Elasticitäts-Constanten isotroper Körper", *Ann. Phys.*, 38, 573-587.
- [32] Reuss A. (1929). "Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle", *ZAMM*, 9, 49-58.
- [33] Taylor G I. (1938). "Plastic strains in metals", *J. Inst. Metals*, 62: 307-324.
- [34] Bishop JFW, and Hill R. (1951). "A theoretical derivation of the plastic properties of polycrystalline face-center metal", *Philos. Mag.*, 42: 414-427.
- [35] Drucker DC. (1959). "On minimum weight design and strength of non-homogeneous plastic bodies", *Non-homogeneity in elasticity and plasticity* (ed. Olszag W.), 139-146, Pergamon Press.
- [36] Rastellini F, Oller S. (2004). "Modelado numérico de no linealidad constitutiva en laminados compuestos - Teoría de mezclas". *Métodos Computacionais em Engenharia*. Lisboa (Portugal): APMTAC.

- [37] Salomon O, Rastellini F, Oller S, Oñate E. (2005). "Fatigue prediction for composite materials and structures", *AVT-121 - Symposium on "Evaluation, Control and Prevention of High Cycle Fatigue in Gas Turbine Engines for Land, Sea and Air Vehicles"*. Spain: NATO Research and Technology Organisation (RTO).
- [38] Eshelby JD (1956) "The continuum theory of lattice defects". In: *Progress in Solid State Physics* (ed.F Seitz & D Turnbull), 79–114. Academic.
- [39] Eshelby JD (1957) "The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems". *Proc. Royal Soc. London A*241: 376-396.
- [40] Mori T and Tanaka K (1973) "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions". *Acta Metallurgica*, 21:571-574.
- [41] Benveniste Y. (1987). "A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials". *Mechanics of Materials*, 6: 147-157.
- [42] Kröner E. (1958). "Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls", *Z. Physik*, 151: 504-518.
- [43] Hashin Z. (1962). "The elastic moduli of heterogeneous materials". *Journal of Applied Mechanics*. 29: 143-150.
- [44] Hashin Z, Shtrikman S. (1963). "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 11: 127-140.
- [45] Budiansky B. (1965). "On the elastic moduli of some heterogeneous materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 13: 223-227.
- [46] Hill R. (1965). "A self-consistent mechanics of composite materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 13: 213-222.
- [47] Christensen RM, Lo KH. (1979). "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 27: 315-330.
- [48] Hashin Z. (1983). "Analysis of composite materials. A survey". *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME*. 50(3): 481-505.
- [49] Aboudi J. (1989). "Micromechanical analysis of composites by the method of cells". *Appl. Mech. Rev.* 42, 193-221.
- [50] Aboudi J. (1999). *"Mechanics of composite materials"*. Amsterdam: Elsevier.

- [51] Aboudi J. (1996). "Micromechanical analysis of composites by the method of cells — Update". *Appl. Mech. Rev.* 49, S83-S91.
- [52] Pindera MJ, Bednarczyk BA. (1999). "An efficient implementation of the generalized method of cells for unidirectional, multi-phased composites with complex microstructures". *Composites* 30B, 87-105.
- [53] Williams TO, Aboudi J. (1999). "A generalized micromechanics model with shear-coupling". *Acta Mech.* 138, 131-154.
- [54] Bensoussan A, Lions JL, Papanicolaou G. (1978). "*Asymptotic analysis for periodic structures*". North-Holland, Amsterdam.
- [55] Sanchez-Palencia E. (1980). "*Non-homogeneous media and vibration theory*". Lecture Notes in Physics 127, Springer-Verlag, Berlin.
- [56] Sanchez-Hubert J and Sanchez-Palencia E. (1992) "*Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*". Masson.
- [57] Tolenado A, Murakami H. (1987). "A high-order mixture model for periodic particulate composites". *Int. Journal of Solids & Structures.* 23(7): 989-1002.
- [58] Devries F, Dumontet H, Duvaut G, Lene F. (1989). "Homogenization and damage for composite structures". *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering.* 27(2): 285-298.
- [59] Guedes JM, Kikuchi N. (1990). "Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 83(2): 143-198.
- [60] Hollister SJ, Kikuchi N. (1992). "Comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites". *Computational Mechanics.* 10(2): 73-95.
- [61] Fish J, Yu Q, Shek K. (1999). "Computational damage mechanics for composite materials based on mathematical homogenization". *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering.* 45(11): 1657-1679.
- [62] Christman T, Needleman A, Suresh S. (1989). "An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites". *Acta Metallurgica.* 37(11): 3029-3050.

- [63] Tvergaard V. (1990). "Analysis of tensile properties for whisker-reinforced metal-matrix composites. *Acta Metallurgica et Materialia*". 38(2): 185-194.
- [64] Bao G, Hutchinson JW, McMeeking RM. (1991). "Plastic reinforcement of ductile matrices against plastic flow and creep". *Acta Metallurgica et Materialia*. 39(8): 1871-1882.
- [65] Brockenbrough JR, Suresh S, Wienecke HA. (1991). "Deformation of metal-matrix composites with continuous fibres: geometrical effect of fibre distribution and shape". *Acta Metallurgica et Materialia*. 39(5): 735-752.
- [66] Nakamura T, Suresh S. (1993). "Effect of thermal residual stress and fibre packing on deformation of metal-matrix composites". *Acta Metallurgica et Materialia*. 41(6): 1665-1681.
- [67] McHugh PE, Asaro RJ, Shih CF. (1993). "Computational modelling of metal matrix composite materials - III. Comparison with phenomenological models". *Acta Metallurgica et Materialia*. 41(5): 1489- 1499.
- [68] Smit RJM, Brekelmans WAM, Meijer HEH. (1999). "Prediction of the large-strain mechanical response of heterogeneous polymer systems: local and global deformation behaviour of a representative volume element of voided polycarbonate". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 47(2): 201-221.
- [69] van der Sluis O, Schreurs PJG, Meijer HEH. (1999). "Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation". *Mechanics of Materials*. 31(11): 743-759.
- [70] Terada K, Kikuchi N. (1995). "Nonlinear homogenization method for practical applications". In: *Computational Methods in Micromechanics* (eds. Ghosh S, Ostoja-Starzewski M), AMD-Vol. 212 / MD-Vol. 62, ASME, 1-16.
- [71] Smit RJM. (1998). "*Toughness of heterogeneous polymeric systems*". Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands. [PhD Thesis]
- [72] Smit RJM, Brekelmans WAM, Meijer HEH. (1998). "Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 155(1-2): 181-192.
- [73] Miehe C, Schroder J, Schotte J. (1999) "Computational homogenization analysis in finite plasticity: simulation of texture development in

- polycrystalline materials". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 171(3-4): 387-418.
- [74] Michel JC, Moulinec H, and Suquet P. (1999). "Effective properties of composite materials with periodic microstructure: a computational approach". *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172:109-143.
- [75] Michel JC, Moulinec H, and Suquet P. (2001). "A computational scheme for linear and non-linear composites with arbitrary phase contrast". *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52:139-160.
- [76] Feyel F and Chaboche JL. (2000). "FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials" *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(3):309-330.
- [77] Zalamea F. (2001). "*Tratamiento numérico de Materiales Compuestos mediante la Teoría de Homogeneización*". Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona. [Tesis doctoral]
- [78] Zalamea F, Canet JM, and Oller S. (2000). "A double scale method for simulating of periodic composite materials". In: *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona. [CD-ROM]
- [79] Ghosh S, Lee K, Moorthy S. (1995). "Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and Voronoï cell finite element method". *Int. Journal of Solids & Structures*. 32(1): 27-62.
- [80] Ghosh S, Lee K, Moorthy S. (1996). "Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenisation and Voronoï cell finite element model". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 132: 63-116.
- [81] Moulinec H, Suquet P. (1998). "A numerical method for computing the overall response of non-linear composites with complex microstructure". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 157: 69-94.
- [82] Terada K, Kikuchi N. (1995). "Nonlinear homogenization method for practical applications". In: *Computational Methods in Micromechanics* (eds. Ghosh S, Ostoja-Starzewski M), AMD-Vol. 212 / MD-Vol. 62, ASME, 1-16.



- [83] Lee K, Ghosh S. (1999). "A microstructure based numerical method for constitutive modelling of composite and porous materials". *Materials Science & Engineering*. A272(1): 120-133.
- [84] Hashin Z and Shtrikman S. (1963). "A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11:127-140.
- [85] Talbot DRS and Willis JR. (1997). "Bounds of third order for the overall response of nonlinear composites". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(1):87-111.
- [86] Talbot DRS and Willis JR. (1998). "Upper and lower bounds for the overall response of an elastoplastic composite". *Mechanics of Materials*, 28:1-8.
- [87] Willis JR. (2001). "Mechanics of random and multiscale microstructures". In: *Lectures on mechanics of random media*. 221-267. Springer-Verlag.
- [88] Drugan WJ and Willis JR. (1996). "A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites". *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 44(4):497-524.
- [89] Ponte-Castañeda P. (1996). "Exact second-order estimates for the effective properties of nonlinear composite materials". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 44(6):827-862.
- [90] Torquato S. (1997). "Effective stiffness tensor of composite media - i. exact series expansions". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(9):1421-1448.
- [91] Torquato S. (1998). "Effective stiffness tensor of composite media - ii. applications to isotropic dispersions". *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8):1411-1440.
- [92] Ostoja-Starzewski M, Sheng PY, and Jasiuk I. (1997). "Damage patterns and constitutive response of random matrix-inclusion composites". *Engineering Fracture Mechanics*, 58(5-6):581-606.
- [93] Alzebdeh K and Ostoja-Starzewski M. (1996). "Micromechanically based stochastic finite elements: length scales and anisotropy". *Probabilistic Engineering Mechanics*, 11:205-214.

- [94] Alzebdeh K, Al-Ostaz A, Jasiuk I, and Ostoja-Starzewski M. (1998). "Fracture of random matrix-inclusion composites: scale effects and statistics". *International Journal of Solids and Structures*, 35(19):2537-2566.
- [95] Borbély A, Biermann H, and Hartmann O. (2001). "FE investigation of the effect of particle distribution on the uniaxial stress-strain behaviour of particulate reinforced metal-matrix composites". *Material Science and Engineering A*, 313:34-45.
- [96] Kanit T, Forest S, Galliet I, Mounory V, and Jeulin D. (2003). "Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach". *Int. Journal of Solids and Structures*, 40:3647-3679.
- [97] Buryachenko VA, Pagano NJ, Kim RY, and Spowart JE. (2003). "Quantitative description and numerical simulation of random microstructures of composites and their effective elastic moduli". *Int. Journal of Solids and Structures*, 40:47-72.
- [98] Byström J. (2003). "Influence of inclusions distribution on the effective properties of heterogeneous media". *Composites Part B: engineering*, 34:587-592.
- [99] Graham LL and Baxter SC. (2001). "Simulation of local material properties based on moving-window GMC". *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16:295-305.
- [100] Knight MG, Wrobel LC, and Henshall JL. (2003). "Micromechanical response of fibre-reinforced materials using the boundary element technique". *Composite Structures*, 62:341-352.
- [101] Trusdell C and Toupin R. (1960). *"The classical Field Theories"*. Berlin: Springer Verlag.
- [102] Green AE and Naghdi PM. (1965). "A dynamical theory of interacting continua". *Int. Journal Engineering Science*. Vol. 3, 231-241.
- [103] Ortiz M and Popov EP. (1982). "Plain concrete as a composite material". *Mechanics of Materials*. Vol. 1, No. 2, 139–150.
- [104] Ortiz M and Popov EP. (1982). "Physical model for the inelasticity of concrete". *Proceedings of The Royal Society of London*. A383, 101-125.

- [105] Oller S, Oñate E, Miquel J, Botello S. (1996). "A plastic damage constitutive model for composite materials". *Int. Journal of Solids and Structures*. Vol. 33, No. 17, 2501-2518.
- [106] Oller S, Neamtu L, Oñate E. (1995). "Una Generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento en Serie-Paralelo". En: *Materiales Compuestos 95*, editado por F. París y J. Cañas. AEMAC.
- [107] Oñate E, Neamtu L, Oller S. (1997). "Generalization of the classical mixing theory for analysis of composite materials". In: *International Conference on Advances in Computational Engineering Science (ICES'97)*, editado por N.S. Atluri y G. Yagawa. Georgia-U.S.A.: Tech. Science Press.
- [108] Neamtu L, Oller S, Oñate E. (1997). "A generalized mixing theory Elasto-Damage - Plastic model for finite element analysis of composites". In: *5th Int. Conf. on Computational Plasticity - Complas V*, editado por D.R. Owen, E. Oñate y E. Hinton. Barcelona: CIMNE.
- [109] Car E. (2000). "Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos". Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. [Tesis doctoral].
- [110] Car E, Oller S, Oñate E. (2000). "Tratamiento numérico de los materiales compuestos". Monografía M57. Barcelona: CIMNE.
- [111] Mayugo JA, Costa J, Blanco N, Oller S. (2002). "A constitutive model for the fatigue life prediction of composite materials based on continuum damage mechanics". In: *10th European Conference on Composite Materials*. Brugge (Belgium): European Society of Composite Materials (ESCM).
- [112] Oller S. (2003). "3.4 Teoría de mezclas generalizada". En: *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Monografía M74. Barcelona: CIMNE.
- [113] Rastellini, F.; Oller, S.; Salomon, O.; Oñate, E. (2003). "Advanced serial-parallel mixing theory for composite materials analysis. Continuum basis and finite element applications", *COMPLAS 2003, Proceeding (CD) of the VII International Conference on Computational Plasticity*. CIMNE, Barcelona.
- [114] Rastellini F, Oller S, Salomon O, Oñate E. (2003). "Teoría de Mezclas Serie-Paralelo Avanzada para el Análisis de Materiales Compuestos" *V Congreso de la Asociación Española de Materiales Compuestos*. Composites 2003, Zaragoza: AEMAC, pág. 729-741. A. Miravete & J. Cuartero (Eds)

- [115] Rastellini F, Oller S. (2004). "Modelado numérico de no linealidad constitutiva en laminados compuestos - Teoría de mezclas". *Métodos Computacionais em Engenharia*. Lisboa (Portugal): APMTAC.
- [116] Tsai SW and Wu EM. (1971). "A general theory of strength for anisotropic materials". *J. Composite Materials*, Vol. 5, 58-80.
- [117] Hill R. (1948). "A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals". *Proc. Royal Society of London, Series A*. Vol. 193, 281-297.
- [118] Tsai SW. (1965). "Strength characteristics of composite materials". *NASA CR-224*.
- [119] Azzi VD and Tsai SW. (1965). "Anisotropic strength of composites". *Experimental Mechanics*. 283-288.
- [120] Hoffman O. (1967). "The brittle strength of orthotropic materials". *J. Composite Materials*. Vol. 1, 200-206.
- [121] Chamis CC. (1969). "Failure criteria for filamentary composites". *Composite Materials: Testing & Design*. Philadelphia: ASTM. STP 460, 336-351.
- [122] Mayugo, JA. (2003). "*Estudio constitutivo de materiales compuestos laminados sometidos a cargas cíclicas*". Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. [Tesis doctoral].
- [123] Oller S, Car E, Lubliner J. (2003). "Definition of a general implicit orthotropic yield criterion", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(7-8):895-912.
- [124] Paris F, Correa E, Cañas J. (2003). "Micromechanical view of failure of the matrix in fibrous composite materials". *Composites Science and Technology*, 63:1041-1052.
- [125] Dávila CG and Camanho PP. (2003). "Failure criteria for FRP laminates in plane stress". *NASA Technical Memorandum*, TM-2003-212663, NASA.
- [126] Hinton MJ and Soden PD. (1998). "Predicting failure in composite laminates: the background to the exercise". *Composites Science and Technology*, 58(7):1001-1010.
- [127] Soden PD, Hinton MJ, Kaddour AS. (1998). "A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates". *Composites Science and Technology*, 58(7): 1225-1254.

- [128] Hinton MJ, Kaddour AS, Soden PD. (2001). "Predicting failure in fibre composites: lessons learned from the world-wide failure exercise". In: *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Composite Materials (ICCM/13)*. Beijing, China.

## **4 MODELO CONSTITUTIVO PARA COMPUESTOS CON FIBRAS LARGAS. Composición de modelos constitutivos.**

### **4.1 Introducción**

El diseño de piezas estructurales realizadas con materiales compuestos requiere herramientas informáticas que modelen adecuadamente el comportamiento de estos materiales incluso en el rango no lineal.

Con el enfoque de los métodos de campo promedio (*mean field methods*), en este capítulo, se desarrolla una formulación para modelar específicamente el comportamiento material no-lineal de láminas reforzadas con fibras largas unidireccionales. Una primera versión de este modelo fue propuesta por Rastellini & Oller (2004) [1] para considerar componentes con daño elástico y/o plasticidad aditiva. La generalización que aquí se presenta permite la composición (o mezcla) de materiales con cualquier modelo constitutivo no lineal. Se basa en la gestión apropiada de los modelos constitutivos de fases componentes enmarcado en la mecánica de los medios continuos. Con tal fin, se propone una formalización preliminar del enfoque multi-material denominada “composición de modelos constitutivos”, que constituirá la base de futuros desarrollos para considerar diversas estructuras internas del compuesto. Con este marco teórico, se formulan dos versiones del modelo que se diferencian

básicamente en las “ecuaciones de cierre” consideradas. Específicamente el primero, al cual denominaremos modelo básico serie-paralelo (BSP), involucra ecuaciones de cierre que consideran la hipótesis de iso-deformación en la dirección de fibra y la hipótesis de iso-tensión en direcciones transversales; mientras que el último, denominado modelo enriquecido serie-paralelo (ESP), se formula para mejorar la rigidez transversal y de cortante inicialmente subestimada por el BSP.

Recientemente, este modelo para compuestos fue empleado en combinación con un modelo de fatiga para los componentes con el objetivo de estudiar la fatiga en laminados compuestos de FRP (*fibre reinforced plastic*) [2].

## 4.2 Notación y definiciones

Consideramos un material compuesto fibroso bifásico y postulamos la existencia, aunque sólo sea en sentido estadístico, de un elemento de volumen representativo periódico (RVE) con simetría transversalmente isótropa. Las dos fases constituyentes serán tratadas, de ahora en adelante, como “matriz” y “fibra” y todas las cantidades relacionadas con ellas serán indicadas con los superíndices  $f$  y  $m$ .

El lugar de referencia del cuerpo del material compuesto será denotado con el símbolo  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . El RVE se descompone clásicamente como la unión de dos subdominios de los materiales componentes:  $\Omega = {}^m\Omega \cup {}^f\Omega$ . Denotaremos las fracciones volumétricas con  ${}^fk$ ,  ${}^mk$ ; cumpliendo evidentemente  ${}^fk + {}^mk = 1$ . El promedio lineal volumétrico del campo de deformaciones se puede obtener para cada subdominio respectivo, empleando su definición estándar:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} dV}{\int_{\Omega} dV} \quad \overline{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{\int_{{}^f\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} dV}{\int_{{}^f\Omega} dV} \quad \overline{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{\int_{{}^m\Omega} \boldsymbol{\varepsilon} dV}{\int_{{}^m\Omega} dV} \quad (4.1)$$

El símbolo  $\widehat{\bullet}$  indicará los tensores correspondientes a los promedios cuadráticos  $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\widehat{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\widehat{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}}$  cuyas definiciones por componente son las siguientes:

$$\widehat{\varepsilon}_{ij} := \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2 dV}{\int_{\Omega} dV}} \quad \widehat{{}^f\varepsilon}_{ij} := \sqrt{\frac{\int_{{}^f\Omega} \varepsilon_{ij}^2 dV}{\int_{{}^f\Omega} dV}} \quad \widehat{{}^m\varepsilon}_{ij} := \sqrt{\frac{\int_{{}^m\Omega} \varepsilon_{ij}^2 dV}{\int_{{}^m\Omega} dV}}. \quad (4.2)$$

Análogamente las tensiones promedio lineales y cuadráticas se indican con:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} := \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV}{\int_{\Omega} dV} \quad \overline{{}^f\boldsymbol{\sigma}} := \frac{\int_{{}^f\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV}{\int_{{}^f\Omega} dV} \quad \overline{{}^m\boldsymbol{\sigma}} := \frac{\int_{{}^m\Omega} \boldsymbol{\sigma} dV}{\int_{{}^m\Omega} dV}, \quad (4.3)$$

$$\widehat{\sigma}_{ij} := \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 dV}{\int_{\Omega} dV}} \quad \widehat{\sigma}_{ij}^f := \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 dV}{\int_{\Omega} dV}} \quad \widehat{\sigma}_{ij}^m := \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 dV}{\int_{\Omega} dV}}. \quad (4.4)$$

La relación entre los tensores promedios del compuesto y de los componentes está dada mediante las siguientes expresiones:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^f k {}^f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + {}^m k {}^m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.5)$$

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = {}^f k {}^f \bar{\boldsymbol{\sigma}} + {}^m k {}^m \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.6)$$

En una formulación “*strain driven*”, donde la variable libre del problema es el estado de deformación, se asume que el estado actual de la fase “matriz” en un punto  $\mathbf{x}$  de  ${}^m \Omega$  es definido totalmente por la deformación en tal punto  ${}^m \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  y por un conjunto finito de variables internas representadas con el vector  ${}^m \boldsymbol{\beta} \in {}^m I$ , donde  ${}^m I$  representa al conjunto de variables internas admisibles. Teniendo en cuenta que  ${}^m \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{Sym}$ , el conjunto de variables de estado admisibles es:

$${}^m S = \mathbf{Sym} \times {}^m I = \left\{ ({}^m \boldsymbol{\varepsilon}, {}^m \boldsymbol{\beta}) \mid {}^m \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{Sym}, {}^m \boldsymbol{\beta} \in {}^m I \right\}.$$

La tensión  ${}^m \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  se considera como variable dependiente. Con la expresión “ley constitutiva” nos referiremos al sistema de ecuaciones diferenciales que definen la evolución de la tensión y de las variables internas:

$${}^m \dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^m \mathbf{g}({}^m \boldsymbol{\varepsilon}, {}^m \boldsymbol{\beta}, {}^m \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (4.7)$$

$${}^m \dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^m \mathbf{h}({}^m \boldsymbol{\varepsilon}, {}^m \boldsymbol{\beta}, {}^m \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (4.8)$$

De la misma manera, las definiciones anteriores se amplían al material “fibra”.

La energía libre asociada a los componentes y al compuesto se denota respectivamente con  ${}^m U$ ,  ${}^f U$  y  $U$ ; relacionadas mediante la siguiente ecuación:

$$U = {}^f k {}^f U + {}^m k {}^m U.$$

El estado tensional del compuesto  $\boldsymbol{\sigma}$  queda definido por la siguiente propiedad:

$$dU = \boldsymbol{\sigma} : d\bar{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

y por lo tanto suponiendo una relación lineal entre la tensión y la deformación del compuesto, se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : ({}^f k {}^f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + {}^m k {}^m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}).$$



### 4.3 Definición de las partes Serie y Paralela de tensores

El modelo considera una dirección (o direcciones) en la cual los materiales se combinan como materiales en paralelo. En direcciones restantes, se considera un comportamiento en serie.

Por este motivo es necesario poder definir y separar las partes serie y paralela de los tensores de tensión y deformación.

En general se podrían definir y estudiar diferentes tipos de “composición de comportamientos serie-paralelo”: desde sus extremos puro en paralelo (*classical rule of mixtures*) o puro en serie (matrices reforzadas con partículas), hasta los casos de paralelismo en una dirección (matrices reforzadas con fibras) o dos direcciones (laminados bifásicos). El modelo que se desarrolla en este trabajo se particulariza para el caso de fibras unidireccionales.

La orientación del material compuesto unidireccional estará definida mediante un sistema de referencia local. Sea  $e_1$  el versor director que indica el comportamiento en paralelo (dirección de la fibra) y sean  $e_2$  y  $e_3$  los versores directores ortogonales a  $e_1$  que indican las direcciones de comportamiento en serie, se define el tensor proyector paralelo de segundo orden  $\mathbf{N}_p$ :

$$\mathbf{N}_p = e_1 \otimes e_1 \quad (4.9)$$

Es un tensor que permite obtener la proyección paralela a la dirección de la fibra de vector genérico  $v$ :

$$v_p = \mathbf{N}_p \cdot v \quad (4.10)$$

Definimos ahora el tensor proyector paralelo de cuarto orden  $\mathbb{P}_p$ :

$$\mathbb{P}_p = \mathbf{N}_p \otimes \mathbf{N}_p \quad (4.11)$$

y el tensor proyector serie  $\mathbb{P}_s$  que se calcula realizando su complemento:

$$\mathbb{P}_s = \mathbb{I} - \mathbb{P}_p \quad (4.12)$$

Ambos tensores nos permitirán definir la “descomposición” de los campos de deformación y de tensión del compuesto en sus partes serie y paralela:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbb{P}_p : \boldsymbol{\varepsilon} , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbb{P}_s : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbb{P}_p : \boldsymbol{\sigma} , \quad \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbb{P}_s : \boldsymbol{\sigma} \quad (4.14)$$

Como las partes serie y paralela son complementarias, se tiene:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_p + \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_p + \boldsymbol{\sigma}_s \quad (4.16)$$

Todas las descomposiciones y relaciones anteriores se amplían a los materiales matriz y fibra de manera evidente.

#### 4.4 Composición de modelos constitutivos

En esta sección definiremos, para un compuesto bifásico, una clase (tipología) de modelos constitutivos usando las leyes constitutivas de sus materiales componentes. Con tal fin se asume que el conjunto de variables internas admisibles del compuesto  $I$  resulta del producto cartesiano de los conjuntos de variables de estado de las fases componentes  ${}^f S, {}^m S$ :

$$I = {}^f S \times {}^m S = \left\{ \left( {}^f \boldsymbol{\varepsilon}, {}^m \boldsymbol{\varepsilon}, {}^f \boldsymbol{\beta}, {}^m \boldsymbol{\beta} \right) \mid \left( {}^f \boldsymbol{\varepsilon}, {}^f \boldsymbol{\beta} \right) \in {}^f S, \left( {}^m \boldsymbol{\varepsilon}, {}^m \boldsymbol{\beta} \right) \in {}^m S \right\}.$$

Las variables internas del nuevo modelo compuesto  $\left( {}^f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, {}^m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, {}^f \boldsymbol{\beta}, {}^m \boldsymbol{\beta} \right) \in I$  más la deformación promedio del compuesto  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  constituyen el sistema completo de variables de estado del nuevo modelo constitutivo. Se asume también que las leyes constitutivas de cada fase también son aplicables a sus correspondientes variables de estado promedio (lineal y cuadrático).

Se puede reconocer fácilmente que las dos hipótesis anteriores no son suficientes para la definición de un modelo material. El modelo así definido es gobernado por las ecuaciones (4.8) escritas para las variables promedio de matriz y fibra, más la ecuación (4.5). Calculando el número de incógnitas y el número de ecuaciones, se reconoce que el número de incógnitas escalares excede al número de ecuaciones. Con lo que el problema así formulado está incompleto para la definición de un material compuesto. Este hecho tiene un fundamento físico: la definición de un modelo material para el compuesto necesita la introducción de unas ecuaciones adicionales que especifiquen de alguna manera la interacción entre las fases componentes. Este sistema adicional de ecuaciones se denominará “ecuaciones de cierre” y se puede expresar en la forma más general como sigue:

$$f_i \left( {}^f \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, {}^m \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, {}^f \boldsymbol{\beta}, {}^m \boldsymbol{\beta}, {}^f \boldsymbol{\sigma}, {}^m \boldsymbol{\sigma} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.17)$$

Es evidente que el modelo material resultante dependerá crucialmente de la ecuación de cierre específica seleccionada para caracterizar el problema mecánico en la microescala.

Las ecuaciones de cierre definidas en su forma general (4.17) pueden ser consideradas evolutivas en el sentido que serán dependientes de las variables internas de sus materiales componentes, lo que permitiría por ejemplo simular el micro-pandeo de fibras en donde el daño de matriz afecta la estabilidad de la fibra y viceversa. También se podrían incluir otros fenómenos locales como el despegue y deslizamiento fibra-matriz (*debonding, fiber pull-out*). El estudio de las grandes deformaciones podría requerir incluso el uso de ecuaciones que evolucionen con la cinemática del problema.

De esta manera, adoptando diferentes ecuaciones de cierre, se pueden definir una familia de modelos constitutivos para materiales compuestos. A este procedimiento lo llamaremos “composición de modelos constitutivos”, y permite abordar la simulación de variadas tipologías de la microestructura desde refuerzos con partículas hasta fibras cortas y largas. En este trabajo se estudiará solamente el problema de fibras largas, con ecuaciones de cierre estáticas (no evolutivas).

Este enfoque convierte el problema microestructural en un problema algebraico.

#### 4.5 Ecuaciones de cierre para el modelo Básico Serie-Paralelo

La característica distintiva de los compuestos de fibra larga es el bien conocido comportamiento mecánico fuertemente anisótropo. Una ecuación de cierre apropiada para el problema específico de compuestos unidireccionales de fibra larga (LFC, *long fiber composites*) debe poseer las siguientes características: 1) debe conservar la particular restricción axial de sus fases y poseer isotropía transversal en la dirección de simetría cilíndrica siempre que los materiales componentes exhiban esta característica; 2) debe proveer una correcta rigidez tangente, la cual deberá ser igual a la inicial elástica cuando no se produzcan fenómenos inelásticos; 3) debe conservar un carácter de simplicidad puesto que la conveniencia de usar un modelo aproximado, como el propuesto, radica en la posibilidad de evitar los cálculos complejos requeridos por un análisis completo a doble-escala.

Además, con el objeto de definir un modelo constitutivo cuyo algoritmo global sea independiente de los modelos específicos de sus fases componentes, se asumirá que la ecuación de cierre (4.17) no depende de las variables internas  ${}^f\boldsymbol{\beta}$  y  ${}^m\boldsymbol{\beta}$ . Este requisito implica que la ecuación de cierre tiene que considerar solamente las características morfológicas de la celda unitaria, por lo tanto:

$$f_i({}^f\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, {}^m\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, {}^f\boldsymbol{\sigma}, {}^m\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.18)$$

El modelo BSP se basa en la siguiente ecuación de cierre:

$${}^m\bar{\epsilon}_p = {}^f\bar{\epsilon}_p \quad (4.19)$$

$${}^m\bar{\sigma}_s = {}^f\bar{\sigma}_s \quad (4.20)$$

Las hipótesis de iso-deformación en la dirección paralela e iso-tensión en direcciones serie son las más usuales y simples para obtener las características del material compuesto; por ejemplo, estas asunciones fueron utilizadas por Dvorak & Bahei-El-Din [3] para definir un modelo de plasticidad anisótropo, y por Rastellini *et al.* [4] [1] [2] para modelar el comportamiento de materiales compuestos.

Las relaciones (4.19) y (4.20) serán referidas en adelante como ecuaciones de cierre serie-paralelas básicas (BSP). Es bien sabido que el comportamiento serie puro y la ROM inversa proporcionan una estimación pobre de la rigidez transversal. La hipótesis de iso-tensión proporciona estimaciones transversales de la rigidez por debajo de la cota inferior determinada por Hill [5] para un RVE cilíndrico, y no es suficiente para la definición de un modelo LFC realista. Para superar esta limitación, el modelo compuesto se mejora más adelante en la sección 4.8 con la definición de las ecuaciones de cierre ESP.

Resumiendo, el modelo BSP es gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{{}^c\bar{\sigma}} = {}^c\mathbf{g} \left( {}^c\bar{\epsilon}, {}^c\bar{\beta}, \dot{{}^c\bar{\epsilon}} \right) \\ \dot{{}^c\bar{\beta}} = {}^c\mathbf{h} \left( {}^c\bar{\epsilon}, {}^c\bar{\beta}, \dot{{}^c\bar{\epsilon}} \right) \\ \bar{\epsilon} = {}^fk \, {}^f\bar{\epsilon} + {}^mk \, {}^m\bar{\epsilon} \\ \bar{\sigma} = {}^fk \, {}^f\bar{\sigma} + {}^mk \, {}^m\bar{\sigma} \\ {}^m\bar{\sigma}_s = {}^f\bar{\sigma}_s \\ {}^m\bar{\epsilon}_p = {}^f\bar{\epsilon}_p \end{array} \right. \quad \text{with } c = f, m. \quad (4.21)$$

## 4.6 Algoritmo de resolución del modelo BSP

La estructura del algoritmo que se desarrollará a continuación, será utilizado tanto para resolver el modelo básico como el enriquecido (modelo ESP). La diferencia radicaré en la interpretación de las variables empleadas. Para el problema BSP se emplearán las variables promedio lineal, es decir:  $\epsilon := \bar{\epsilon}$ ,  $\sigma := \bar{\sigma}$ , etc.; mientras que para el ESP se empleará un cambio de variables ( $\epsilon := \epsilon^*$ ,  $\sigma := \sigma^*$ , etc.) que se deducirá más adelante en el apartado 4.8.

El modelo BSP se puede resumir como sigue. Las variables de estado que definen el problema son  ${}^f\boldsymbol{\varepsilon}, {}^m\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{Sym}$ ,  ${}^f\boldsymbol{\beta} \in {}^fI$ ,  ${}^m\boldsymbol{\beta} \in {}^mI$  más la deformación total del compuesto  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Las ecuaciones que gobiernan el problema son:

1) las leyes constitutivas de ambos materiales:

$$\begin{aligned} {}^c\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= {}^c\mathbf{g}\left({}^c\boldsymbol{\varepsilon}, {}^c\boldsymbol{\beta}, {}^c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \\ {}^c\dot{\boldsymbol{\beta}} &= {}^c\mathbf{h}\left({}^c\boldsymbol{\varepsilon}, {}^c\boldsymbol{\beta}, {}^c\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad \text{con } c = f, m \quad (4.22)$$

2) las ecuaciones que relacionan los estados de deformación y tensión de los componentes con los del compuesto:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^fk^f\boldsymbol{\varepsilon} + {}^mk^m\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^fk^f\boldsymbol{\sigma} + {}^mk^m\boldsymbol{\sigma} \quad (4.24)$$

3) las ecuaciones de cierre del modelo BSP, que definen la compatibilidad de deformación y el equilibrio tensional entre componentes:

$${}^m\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^f\boldsymbol{\varepsilon}_p, \quad (4.25)$$

$${}^m\boldsymbol{\sigma}_s = {}^f\boldsymbol{\sigma}_s. \quad (4.26)$$

El problema algorítmico, considerado como un problema “*strain driven*” (i.e. la deformación del compuesto es la variable libre), puede ser expuesto como sigue: “Dadas las variables de estado en el tiempo  $t$ :

$${}^t[{}^m\boldsymbol{\varepsilon}], {}^t[{}^f\boldsymbol{\varepsilon}], {}^t[{}^m\boldsymbol{\beta}], {}^t[{}^f\boldsymbol{\beta}], {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}],$$

y la deformación del compuesto en el tiempo  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\varepsilon}],$$

encuentre el estado actualizado del compuesto en el tiempo  $t + \Delta t$ , definido por el conjunto de variables:

$${}^{t+\Delta t}[{}^m\boldsymbol{\varepsilon}], {}^{t+\Delta t}[{}^f\boldsymbol{\varepsilon}], {}^{t+\Delta t}[{}^m\boldsymbol{\beta}], {}^{t+\Delta t}[{}^f\boldsymbol{\beta}], {}^{t+\Delta t}[{}^m\boldsymbol{\sigma}], {}^{t+\Delta t}[{}^f\boldsymbol{\sigma}], {}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\sigma}],$$

que satisfagan las ecuaciones de gobierno (4.22)-(4.26) en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$ ”.

El cuadro siguiente muestra las variables conocidas e incógnitas del problema:

Variables conocidas:	${}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\varepsilon}],$	variable libre
	${}^t[{}^m\boldsymbol{\varepsilon}], {}^t[{}^f\boldsymbol{\varepsilon}], {}^t[{}^m\boldsymbol{\beta}], {}^t[{}^f\boldsymbol{\beta}].$	variables internas

Variables incógnitas:  ${}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}, {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}, {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix},$  variables dependientes  
 ${}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}, {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}, {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}, {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}.$  v. internas actualizadas

Las variables  ${}^m \boldsymbol{\beta}$  y  ${}^f \boldsymbol{\beta}$  agrupan todo el conjunto de variables internas que definen el estado de los materiales componentes, como por ejemplo las variables internas del daño (tensor de rigidez dañado) y/o de la plasticidad (deformación plástica):

$$\begin{aligned} {}^m \boldsymbol{\beta} &:= \{ {}^m \boldsymbol{\varepsilon}^p, {}^m \mathbb{C}^d \} \\ {}^f \boldsymbol{\beta} &:= \{ {}^f \boldsymbol{\varepsilon}^p, {}^f \mathbb{C}^d \} \end{aligned}$$

A continuación se describirá la resolución del sistema de ecuaciones no lineales que definen el problema mediante el desarrollo específico de una estrategia iterativa aplicando el método de Newton-Raphson.

Se presenta un algoritmo de resolución general para el compuesto que emplea, como cajas negras<sup>2</sup>, los modelos constitutivos de los materiales componentes. Esto permite hacer uso de algoritmos ya desarrollados en la literatura para describir el comportamiento de materiales homogéneos y que suelen estar disponibles en muchos códigos FEM. Es decir, se asume que para cada material componente el algoritmo de integración local de las ecuaciones constitutivas es provisto:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\left\{ {}^t \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}, {}^t \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \right\} ; {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}} & \underbrace{\left\{ {}^t \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}, {}^t \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \right\} ; {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix}} & \\ \Downarrow & \Downarrow & \\ \boxed{\begin{array}{c} \text{Algoritmo} \\ \text{Constitutivo} \\ \text{de Fibra} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} \text{Algoritmo} \\ \text{Constitutivo} \\ \text{de Matriz} \end{array}} & (4.27) \\ \Downarrow & \Downarrow & \\ \underbrace{{}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} ; {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^f \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}} & \underbrace{{}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} ; {}^{t+\Delta t} \begin{bmatrix} {}^m \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix}} & \end{array}$$

Los algoritmos para la resolución de las leyes constitutivas de los materiales componentes han sido denotados por “algoritmos constitutivos de fibra/matriz”, por otro lado, al algoritmo para la resolución del todo el modelo compuesto se llamará “algoritmo del compuesto”.

<sup>2</sup> Caja negra: método de análisis de un sistema en el que únicamente se considera la relación entre las entradas o excitaciones y las salidas o respuestas, prescindiendo de su estructura interna.

Además cada modelo de material componente debe también proveer su propio operador tangente consistente  ${}^c\mathbb{C}$  cuyos algoritmos son referidos en (4.27).

El algoritmo del compuesto hará un uso fundamental de la siguiente descomposición de los operadores tangentes inducidos por la descomposición serie-paralelo previamente detallada en el apartado 4.3:

$${}^c\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial {}^c\sigma_P}{\partial {}^c\epsilon_P} & \frac{\partial {}^c\sigma_P}{\partial {}^c\epsilon_S} \\ \frac{\partial {}^c\sigma_S}{\partial {}^c\epsilon_P} & \frac{\partial {}^c\sigma_S}{\partial {}^c\epsilon_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^c\mathbb{C}_{PP} & {}^c\mathbb{C}_{PS} \\ {}^c\mathbb{C}_{SP} & {}^c\mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\text{donde: } \begin{cases} {}^c\mathbb{C}_{PP} = \mathbb{P}_P : {}^c\mathbb{C} : \mathbb{P}_P \\ {}^c\mathbb{C}_{PS} = \mathbb{P}_P : {}^c\mathbb{C} : \mathbb{P}_S \\ {}^c\mathbb{C}_{SP} = \mathbb{P}_S : {}^c\mathbb{C} : \mathbb{P}_P \\ {}^c\mathbb{C}_{SS} = \mathbb{P}_S : {}^c\mathbb{C} : \mathbb{P}_S \end{cases}, \quad \text{con: } c = m, f.$$

La parte serie de la deformación de la matriz  ${}^m\epsilon_S$  se selecciona como la variable independiente para el esquema de Newton-Raphson del algoritmo compuesto, y el desequilibrio en las tensiones serie  $\Delta\sigma_S$  será el residuo a minimizar:

$$\Delta\sigma_S = {}^m\sigma_S - {}^f\sigma_S. \quad (4.29)$$

La deformación serie total de uno de los materiales se elige como incógnita –en este caso la de la matriz ( ${}^m\epsilon_S$ )– porque la deformación del otro material depende del primero:

$${}^f\epsilon_S({}^m\epsilon_S) = \frac{1}{{}^fk} \epsilon_S - \frac{{}^mk}{{}^fk} {}^m\epsilon_S \quad (4.30)$$

$$\Delta\sigma_S({}^m\epsilon_S) = {}^m\sigma_S({}^m\epsilon_S) - {}^f\sigma_S({}^f\epsilon_S({}^m\epsilon_S)) \quad (4.31)$$

La derivada de la función objetivo (el residuo) con respecto a la incógnita:

$$\frac{\partial[\Delta\sigma_S]}{\partial {}^m\epsilon_S} = \frac{\partial[{}^m\sigma_S - {}^f\sigma_S]}{\partial {}^m\epsilon_S} = \frac{\partial {}^m\sigma_S}{\partial {}^m\epsilon_S} - \frac{\partial {}^f\sigma_S}{\partial {}^f\epsilon_S} : \frac{\partial {}^f\epsilon_S}{\partial {}^m\epsilon_S} \quad (4.32)$$

da la expresión del Jacobiano (en función de los operadores tangentes de los componentes):

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_\kappa &= \frac{\partial [\Delta \boldsymbol{\sigma}_S]}{\partial {}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S} \bigg|_{{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S = [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa} = \frac{\partial [{}^m \boldsymbol{\sigma}_S]_\kappa}{\partial {}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S} - \frac{\partial [{}^f \boldsymbol{\sigma}_S]_\kappa}{\partial {}^f \boldsymbol{\varepsilon}_S} : \frac{\partial {}^f \boldsymbol{\varepsilon}_S}{\partial {}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S} \\
&= [{}^m \mathbb{C}_{SS}]_\kappa - [{}^f \mathbb{C}_{SS}]_\kappa : \left( -\frac{{}^m k}{{}^f k} \mathbb{I} \right) \\
&= [{}^m \mathbb{C}_{SS}]_\kappa + \frac{{}^m k}{{}^f k} [{}^f \mathbb{C}_{SS}]_\kappa
\end{aligned} \tag{4.33}$$

que será utilizado para actualizar la incógnita en cada paso de proceso iterativo local del método de Newton-Raphson:

$$[{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_{\kappa+1} = [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa - \mathbb{J}^{-1} : [\Delta \boldsymbol{\sigma}_S]_\kappa \tag{4.34}$$

La iteración genérica será denotada con el índice  $\kappa$ . De ahora en adelante y sin posibilidad de ambigüedad, nos referiremos con  $[\bullet]_\kappa$  a las variables  ${}^{t+\Delta t}[\bullet]_\kappa$ , para evitar una notación demasiado compleja.

A continuación, cada paso del algoritmo de solución del compuesto, cuyo organigrama se ilustra en la Figura 4.1, será descrito brevemente para ser implementado como una ley constitutiva en un código de FEM.

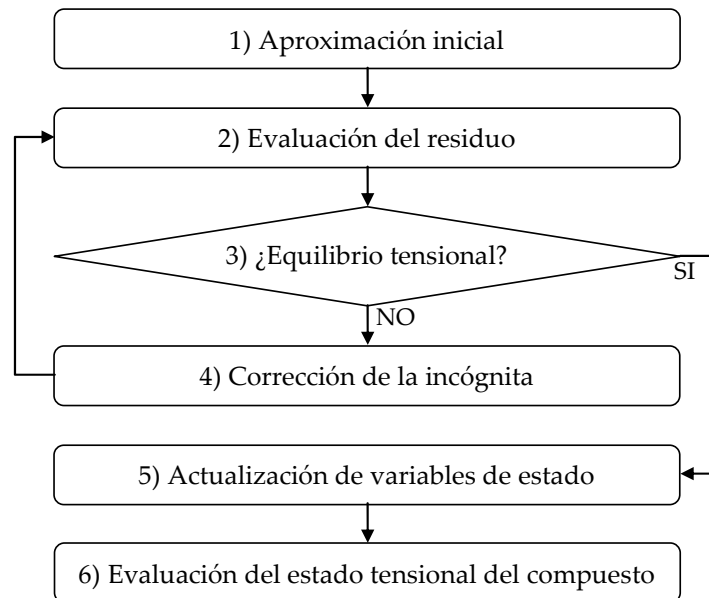


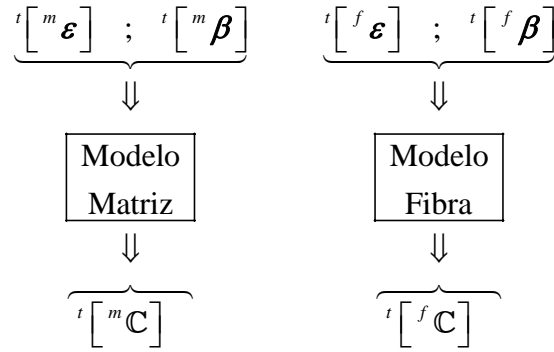
Figura 4.1 – Diagrama de flujo del algoritmo de solución del modelo compuesto.

### Paso 1. Aproximación inicial.

La aproximación inicial de la incógnita puede ser establecida al considerar que el incremento de deformación mantiene la evolución tangente del paso anterior:



Primero, se evalúan los modelos constitutivos de cada material para determinar sus tensores constitutivos tangentes correspondientes al paso anterior (tiempo  $t$ ).



Luego, se determina el valor inicial de la incógnita suponiendo que el incremento de deformación total se distribuye en función de las rigideces tangentes de los materiales constituyentes del paso anterior:

$$\begin{aligned}
 {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}_S] &= {}^m k {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}_S] + {}^f k {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}_S] \\
 [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_S] &= {}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\varepsilon}_S] - {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}_S] \\
 [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P] &= {}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\varepsilon}_P] - {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}_P] \\
 [{}^m \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_S]_0 &= \mathbb{A} : [{}^f \mathbb{C}_{SS} : [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_S] + {}^f k ({}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP}) : [\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_P]] \\
 \text{donde: } \mathbb{A} &= ({}^m k {}^f \mathbb{C}_{SS} + {}^f k {}^m \mathbb{C}_{SS})^{-1}
 \end{aligned}$$

Finalmente se establece el valor inicial de la incógnita  $[{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa$ .

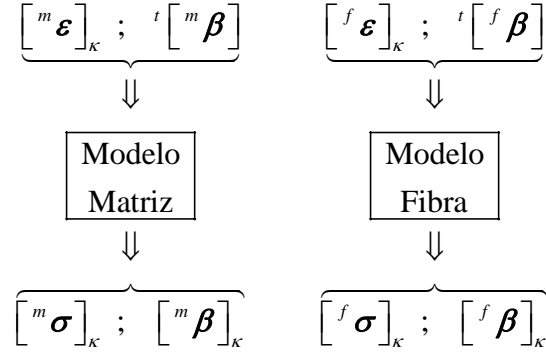
$$\begin{aligned}
 [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa &= {}^t[\boldsymbol{\varepsilon}_S] + [{}^m \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_S]_0 \\
 \kappa &= 0
 \end{aligned}$$

## Paso 2. Evaluación del residuo.

Se determinan los tensores de deformaciones totales de los componentes  $([{}^m \boldsymbol{\varepsilon}]_\kappa \text{ y } [{}^f \boldsymbol{\varepsilon}]_\kappa)$  en función del valor actual de  $[{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa$ .

$$\begin{aligned}
 [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}]_\kappa &= [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_P] + [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa & \text{donde} & \quad [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_P] = [{}^f \boldsymbol{\varepsilon}_P] = {}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\varepsilon}_P] \\
 [{}^f \boldsymbol{\varepsilon}]_\kappa &= [{}^f \boldsymbol{\varepsilon}_P] + [{}^f \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa & \text{donde} & \quad [{}^f \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa = \frac{1}{{}^f k} {}^{t+\Delta t}[\boldsymbol{\varepsilon}_S] - \frac{{}^m k}{{}^f k} [{}^m \boldsymbol{\varepsilon}_S]_\kappa
 \end{aligned}$$

Se evalúan los modelos constitutivos de cada material para determinar sus estados tensionales y variables internas actualizadas.



Luego, se procede a evaluar el residuo para averiguar si se ha conseguido el equilibrio tensional y con él la convergencia del modelo constitutivo.

$$\begin{aligned}
 [\Delta \boldsymbol{\sigma}_s]_{\kappa} &= [{}^m \boldsymbol{\sigma}_s]_{\kappa} - [{}^f \boldsymbol{\sigma}_s]_{\kappa} \quad \text{donde:} \quad \left[ \begin{matrix} {}^m \boldsymbol{\sigma}_s \end{matrix} \right]_{\kappa} = \mathbb{P}_s : \left[ \begin{matrix} {}^m \boldsymbol{\sigma} \end{matrix} \right]_{\kappa} \\
 &\quad \left[ \begin{matrix} {}^f \boldsymbol{\sigma}_s \end{matrix} \right]_{\kappa} = \mathbb{P}_s : \left[ \begin{matrix} {}^f \boldsymbol{\sigma} \end{matrix} \right]_{\kappa}
 \end{aligned}$$

### Paso 3. Control de convergencia.

Para elegir la tolerancia se debe tener en cuenta como referencia el orden de magnitud de las tensiones en serie. Si las tensiones del paso previo son diferentes que cero, se toma el mínimo de ellas, en caso contrario se toma como estimación las tensiones linealizadas.

$$\begin{aligned}
 ref1 &= \min \left\{ \left\| {}^t \left[ \begin{matrix} {}^m \boldsymbol{\sigma}_s \end{matrix} \right] \right\|, \left\| {}^t \left[ \begin{matrix} {}^f \boldsymbol{\sigma}_s \end{matrix} \right] \right\| \right\} \\
 ref2 &= \min \left\{ \left\| {}^t \left[ \begin{matrix} {}^m \mathbb{C}_{ss} \end{matrix} \right] : [\boldsymbol{\varepsilon}_s] \right\|, \left\| {}^t \left[ \begin{matrix} {}^f \mathbb{C}_{ss} \end{matrix} \right] : [\boldsymbol{\varepsilon}_s] \right\| \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Si } ref1 > 0 \quad \text{entonces: } refer &= ref1 \\
 \text{sino: } refer &= ref2
 \end{aligned}$$

Se elige la tolerancia en función del valor de referencia:

$$toler = refer \cdot 10^{-4}$$

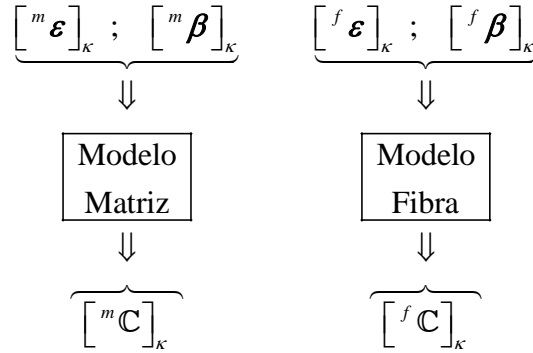
Si la norma del residuo es mayor que la tolerancia, entonces ir a paso 4 – corrección de la incógnita–, sino ir a paso 5 –actualización de variables–.

$$\begin{aligned}
 \text{Si } \left\| [\Delta \boldsymbol{\sigma}_s]_{\kappa} \right\| > toler \quad \text{entonces: } &\text{ir al Paso 4.} \\
 \text{sino: } &\text{ir al Paso 5.}
 \end{aligned}$$

### Paso 4. Corrección de la incógnita.

a) Evaluación de tensores constitutivos tangentes de ambos materiales.

Se evalúan los modelos constitutivos de cada material para determinar sus tensores constitutivos tangentes.



b) *Cálculo del Jacobiano.*

$$[\mathbb{J}]_K = [^m\mathbb{C}_{SS}]_K + \frac{m_k}{f_k} [^f\mathbb{C}_{SS}]_K \quad \text{donde:} \quad \begin{aligned} [^m\mathbb{C}_{SS}]_K &= \mathbb{P}_S : [^m\mathbb{C}]_K : \mathbb{P}_S \\ [^f\mathbb{C}_{SS}]_K &= \mathbb{P}_S : [^f\mathbb{C}]_K : \mathbb{P}_S \end{aligned}$$

c) *Actualización de la incógnita.*

$$\begin{aligned} [^m\epsilon_S]_K &:= [^m\epsilon_S]_K - [\mathbb{J}]_K^{-1} : [\Delta\sigma_S]_K \\ K &:= K + 1 \end{aligned}$$

Ir a paso 2 –evaluación del residuo–.

### Paso 5. Actualización de variables.

Una vez conseguida la convergencia del modelo constitutivo, se deben actualizar todas las variables del modelo:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}[^m\epsilon_S] &= [^m\epsilon_S]_K ; & {}^{t+\Delta t}[^m\beta] &= [^m\beta]_K ; & {}^{t+\Delta t}[^m\sigma] &= [^m\sigma]_K \\ {}^{t+\Delta t}[^f\epsilon_S] &= [^f\epsilon_S]_K ; & {}^{t+\Delta t}[^f\beta] &= [^f\beta]_K ; & {}^{t+\Delta t}[^f\sigma] &= [^f\sigma]_K \end{aligned}$$

### Paso 6. Actualización del estado tensional del compuesto.

El tensor de tensiones del material compuesto se calcula utilizando la ecuación (4.24):

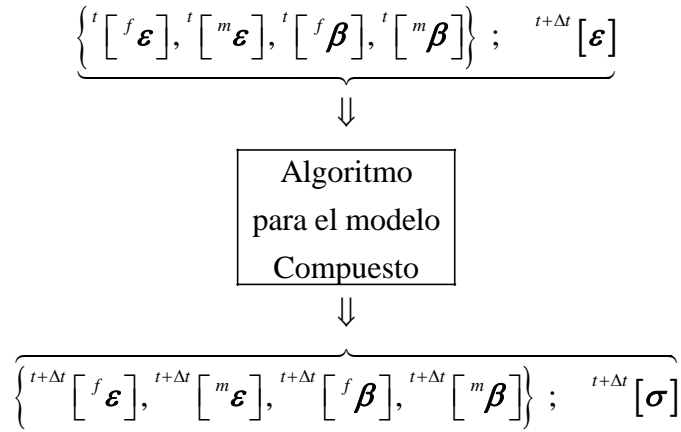
$${}^{t+\Delta t}[\sigma] = {}^m k {}^{t+\Delta t}[^m\sigma] + {}^f k {}^{t+\Delta t}[^f\sigma]$$

El algoritmo presentado permitirá realizar la composición de comportamientos buscada haciendo cumplir las ecuaciones de gobierno del problema básico serie-

paralelo. Como es de esperar, el mismo algoritmo también puede contemplar los casos extremos de comportamiento puramente en paralelo o puramente en serie; tendiendo a la regla de mezclas (ROM) o a la regla de mezclas inversa (iROM) respectivamente.

#### 4.7 Operador tangente del modelo BSP

Las variables de entrada y salida del modelo del compuesto se indican en el esquema siguiente que hace referencia al algoritmo con estrategia iterativa desarrollado en el apartado anterior:



Una vez conseguida la convergencia local del modelo de compuestos, es necesario realizar el cálculo del operador tangente que permitirá conseguir la convergencia del problema global. El tensor constitutivo tangente del compuesto evaluado en cada punto de integración permitirá obtener la matriz de rigidez elemental que será ensamblada para resolver el problema global mediante el método de los elementos finitos.

La derivación de la matriz tangente del compuesto se realiza linealizando el sistema constituido por las ecuaciones (4.22)-(4.26) que gobiernan el modelo BSP. Denotando los incrementos infinitesimales con el prefijo  $d$ , el sistema linealizado de ecuaciones resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} d^f \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^f \boldsymbol{\sigma}}{\partial^f \boldsymbol{\varepsilon}} : d^f \boldsymbol{\varepsilon} = {}^f \mathbb{C} : d^f \boldsymbol{\varepsilon} \\ d^m \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial^m \boldsymbol{\sigma}}{\partial^m \boldsymbol{\varepsilon}} : d^m \boldsymbol{\varepsilon} = {}^m \mathbb{C} : d^m \boldsymbol{\varepsilon} \\ d \boldsymbol{\varepsilon} = {}^f k \ d^f \boldsymbol{\varepsilon} + {}^m k \ d^m \boldsymbol{\varepsilon} \\ d \boldsymbol{\sigma} = {}^f k \ d^f \boldsymbol{\sigma} + {}^m k \ d^m \boldsymbol{\sigma} \\ d^m \boldsymbol{\varepsilon}_p = d^f \boldsymbol{\varepsilon}_p \\ d^m \boldsymbol{\sigma}_s = d^f \boldsymbol{\sigma}_s \end{array} \right. \quad (4.35)$$

El sistema de las ecuaciones (4.35) constituye un sistema lineal de 30 ecuaciones con  $6 \times 5 = 30$  incógnitas representadas por:  $d^f \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $d^m \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $d^f \boldsymbol{\sigma}$ ,  $d^m \boldsymbol{\sigma}$ ,  $d \boldsymbol{\sigma}$ , y puede ser reescrito convenientemente usando la descomposición (4.28):

$$\begin{aligned}
 d^f \boldsymbol{\sigma}_P &= {}^f \mathbb{C}_{PP} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^f \mathbb{C}_{PS} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S & (a) \\
 d^f \boldsymbol{\sigma}_S &= {}^f \mathbb{C}_{SP} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^f \mathbb{C}_{SS} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S & (b) \\
 d^m \boldsymbol{\sigma}_P &= {}^m \mathbb{C}_{PP} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^m \mathbb{C}_{PS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S & (c) \\
 d^m \boldsymbol{\sigma}_S &= {}^m \mathbb{C}_{SP} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^m \mathbb{C}_{SS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S & (d) \\
 d \boldsymbol{\varepsilon}_P &= {}^f k \, d^f \boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^m k \, d^m \boldsymbol{\varepsilon}_P & (e) \\
 d \boldsymbol{\varepsilon}_S &= {}^f k \, d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^m k \, d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S & (f) \\
 d \boldsymbol{\sigma}_P &= {}^f k \, d^f \boldsymbol{\sigma}_P + {}^m k \, d^m \boldsymbol{\sigma}_P & (g) \\
 d \boldsymbol{\sigma}_S &= {}^f k \, d^f \boldsymbol{\sigma}_S + {}^m k \, d^m \boldsymbol{\sigma}_S & (h) \\
 d^m \boldsymbol{\varepsilon}_P &= d^f \boldsymbol{\varepsilon}_P & (i) \\
 d^m \boldsymbol{\sigma}_S &= d^f \boldsymbol{\sigma}_S & (j)
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

La solución del sistema anterior se obtiene directamente una vez  $d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S$  y  $d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S$  se separan de las variables restantes. De (4.36)-i- y (4.36)-e- se tiene:

$$d^m \boldsymbol{\varepsilon}_P = d^f \boldsymbol{\varepsilon}_P = d \boldsymbol{\varepsilon}_P. \tag{4.37}$$

Considerando (4.37), (4.36)-j-, (4.36)-b- y (4.36)-d- se infiere:

$${}^f \mathbb{C}_{SS} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S = {}^m \mathbb{C}_{SS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S - ({}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP}) : d \boldsymbol{\varepsilon}_P. \tag{4.38}$$

La ecuación (4.38) se acopla con la (4.36)-f-. Premultiplicando (4.36)-f- por  ${}^f \mathbb{C}_{SS}$  se tiene:

$${}^f \mathbb{C}_{SS} : d \boldsymbol{\varepsilon}_S = {}^f k \, {}^f \mathbb{C}_{SS} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^m k \, {}^f \mathbb{C}_{SS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S.$$

Sustituyendo la expresión de  ${}^f \mathbb{C}_{SS} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S$  dada por (4.38) en la relación anterior, se consigue:

$${}^f \mathbb{C}_{SS} : d \boldsymbol{\varepsilon}_S = {}^f k \left[ {}^m \mathbb{C}_{SS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S - ({}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP}) : d \boldsymbol{\varepsilon}_P \right] + {}^m k \, {}^f \mathbb{C}_{SS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S.$$

Reacomodando la expresión anterior podemos despejar el término  $d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S$ :

$$({}^f k {}^m \mathbb{C}_{SS} + {}^m k {}^f \mathbb{C}_{SS}) : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S = {}^f \mathbb{C}_{SS} : d \boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^f k ({}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP}) : d \boldsymbol{\varepsilon}_P$$

y finalmente obtener:

$$d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S = \mathbb{A} : \left[ {}^f \mathbb{C}_{SS} : d \boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^f k ({}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP}) : d \boldsymbol{\varepsilon}_P \right], \tag{4.39}$$

donde:

$$\mathbb{A} = \left( {}^f k {}^m \mathbb{C}_{SS} + {}^m k {}^f \mathbb{C}_{SS} \right)^{-1}. \quad (4.40)$$

Conmutando los índices  $f$  y  $m$  de la ecuación (4.39), se puede obtener la expresión para  $d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S$ :

$$d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S = \mathbb{A} : \left[ {}^m \mathbb{C}_{SS} : d\boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^m k \left( {}^m \mathbb{C}_{SP} - {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_P \right]. \quad (4.41)$$

El conocimiento de  $d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S$  y  $d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S$  permite el obtener de la rigidez del compuesto de una manera directa. La parte paralela del tensor diferencial de tensiones del compuesto surge al sustituir (4.36)-a-, (4.36)-c- y (4.37), en (4.36)-g-:

$$d\boldsymbol{\sigma}_P = {}^f k \left( {}^f \mathbb{C}_{PP} : d\boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^f \mathbb{C}_{PS} : d^f \boldsymbol{\varepsilon}_S \right) + {}^m k \left( {}^m \mathbb{C}_{PP} : d\boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^m \mathbb{C}_{PS} : d^m \boldsymbol{\varepsilon}_S \right)$$

empleando (4.39) y (4.41) en la última expresión finalmente se tiene:

$$d\boldsymbol{\sigma}_P = {}^f k \left\{ {}^f \mathbb{C}_{PP} : d\boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^f \mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : \left[ {}^m \mathbb{C}_{SS} : d\boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^m k \left( {}^m \mathbb{C}_{SP} - {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_P \right] \right\} + \\ + {}^m k \left\{ {}^m \mathbb{C}_{PP} : d\boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^m \mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : \left[ {}^f \mathbb{C}_{SS} : d\boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^f k \left( {}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_P \right] \right\}$$

Expandiendo la expresión anterior y reordenando los términos, se obtiene:

$$d\boldsymbol{\sigma}_P = \left[ \left( {}^f k {}^f \mathbb{C}_{PP} + {}^m k {}^m \mathbb{C}_{PP} \right) + {}^m k {}^f k \left( {}^f \mathbb{C}_{PS} - {}^m \mathbb{C}_{PS} \right) : \mathbb{A} : \left( {}^m \mathbb{C}_{SP} - {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_P + \\ + \left( {}^f k {}^f \mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : {}^m \mathbb{C}_{SS} + {}^m k {}^m \mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : {}^f \mathbb{C}_{SS} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_S \quad (4.42)$$

Procederemos a obtener la parte serie del tensor diferencial de tensiones del compuesto. Considerando (4.36)-h- y (4.36)-j- se tiene:

$$d\boldsymbol{\sigma}_S = d^f \boldsymbol{\sigma}_S \\ d\boldsymbol{\sigma}_S = d^m \boldsymbol{\sigma}_S \quad (4.43)$$

La primera de (4.43) junto con (4.37), (4.36)-b- y (4.41) proporciona:

$$d\boldsymbol{\sigma}_S = {}^f \mathbb{C}_{SP} : d\boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^f \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : \left[ {}^m \mathbb{C}_{SS} : d\boldsymbol{\varepsilon}_S + {}^m k \left( {}^m \mathbb{C}_{SP} - {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_P \right] = \\ = \left( {}^f \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m \mathbb{C}_{SS} \right) : d\boldsymbol{\varepsilon}_S + \left[ {}^f \mathbb{C}_{SP} + {}^m k {}^f \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : \left( {}^m \mathbb{C}_{SP} - {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) \right] : d\boldsymbol{\varepsilon}_P \quad (4.44)$$

La ecuación anterior se puede expresar en una forma invariante a la conmutación de índices  $f$  y  $m$  mediante la suma de la expresión conmutada y dividiéndose por dos. La identidad (4.44) con índices conmutados queda:

$$\begin{aligned}
d\sigma_s &= {}^m\mathbb{C}_{SP} d\epsilon_P + {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : \left[ {}^f\mathbb{C}_{SS} : d\epsilon_s + {}^fk \left( {}^f\mathbb{C}_{SP} - {}^m\mathbb{C}_{SP} \right) : d\epsilon_P \right] = \\
&= \left( {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SS} \right) : d\epsilon_s + \left[ {}^m\mathbb{C}_{SP} + {}^fk {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : \left( {}^f\mathbb{C}_{SP} - {}^m\mathbb{C}_{SP} \right) \right] : d\epsilon_P
\end{aligned} \tag{4.45}$$

La media-suma de (4.44) y (4.45) resulta:

$$\begin{aligned}
d\sigma_s &= \frac{1}{2} \left[ \left( {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SS} \right) + \left( {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SS} \right) \right] : d\epsilon_s + \\
&+ \frac{1}{2} \left( {}^m\mathbb{C}_{SP} + {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) : d\epsilon_P + \\
&+ \frac{1}{2} \left[ {}^mk {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : \left( {}^m\mathbb{C}_{SP} - {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) + {}^fk {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : \left( {}^f\mathbb{C}_{SP} - {}^m\mathbb{C}_{SP} \right) \right] : d\epsilon_P
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Esta última expresión se puede simplificar fuertemente observando que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( {}^m\mathbb{C}_{SP} + {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) &= \frac{1}{2} \mathbb{A}^{-1} : \mathbb{A} : \left( {}^m\mathbb{C}_{SP} + {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( {}^fk {}^m\mathbb{C}_{SS} + {}^mk {}^f\mathbb{C}_{SS} \right) : \mathbb{A} : \left( {}^m\mathbb{C}_{SP} + {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) \\
&= \frac{1}{2} {}^fk {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SP} + \frac{1}{2} {}^fk {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SP} + \\
&+ \frac{1}{2} {}^mk {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SP} + \frac{1}{2} {}^mk {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SP}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

por lo tanto, la ecuación (4.46) toma la siguiente expresión final:

$$\begin{aligned}
d\sigma_s &= \frac{1}{2} \left[ \left( {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SS} \right) + \left( {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SS} \right) \right] : d\epsilon_s + \\
&+ \left( {}^mk {}^f\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m\mathbb{C}_{SP} + {}^fk {}^m\mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f\mathbb{C}_{SP} \right) : d\epsilon_P
\end{aligned} \tag{4.48}$$

En la conclusión, adoptando la descomposición (4.28), el operador tangente del modelo BSP resulta:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_P}{\partial \epsilon_P} & \frac{\partial \sigma_P}{\partial \epsilon_S} \\ \frac{\partial \sigma_S}{\partial \epsilon_P} & \frac{\partial \sigma_S}{\partial \epsilon_S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{PP} & \mathbb{C}_{PS} \\ \mathbb{C}_{SP} & \mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix},$$

siendo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{PP} &= \left( {}^f k {}^f \mathbb{C}_{PP} + {}^m k {}^m \mathbb{C}_{PP} \right) + {}^m k {}^f k \left( {}^f \mathbb{C}_{PS} - {}^m \mathbb{C}_{PS} \right) : \mathbb{A} : \left( {}^m \mathbb{C}_{SP} - {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) \\
\mathbb{C}_{PS} &= \left( {}^f k {}^f \mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : {}^m \mathbb{C}_{SS} + {}^m k {}^m \mathbb{C}_{PS} : \mathbb{A} : {}^f \mathbb{C}_{SS} \right) \\
\mathbb{C}_{SP} &= \left( {}^m k {}^f \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m \mathbb{C}_{SP} + {}^f k {}^m \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f \mathbb{C}_{SP} \right) \\
\mathbb{C}_{SS} &= \frac{1}{2} \left[ \left( {}^m \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^f \mathbb{C}_{SS} \right) + \left( {}^f \mathbb{C}_{SS} : \mathbb{A} : {}^m \mathbb{C}_{SS} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Centrando la atención en  $\mathbb{C}_{PS}$  y  $\mathbb{C}_{SP}$ , se reconoce inmediatamente que el operador tangente del compuesto resulta simétrico cuando los operadores tangentes de los materiales componentes son también simétricos. De hecho, si  ${}^f \mathbb{C}$  y  ${}^m \mathbb{C}$  son simétricos entonces:

$${}^c \mathbb{C}_{SS} = {}^c \mathbb{C}_{SS}^T, \quad {}^c \mathbb{C}_{SP} = {}^c \mathbb{C}_{PS}^T, \quad \text{con } c = m, f.$$

Con estas propiedades de simetría, las expresiones (4.49) implican:  $\mathbb{C}_{SS} = \mathbb{C}_{SS}^T$ ,  $\mathbb{C}_{SP} = \mathbb{C}_{PS}^T$ ,  $\mathbb{C}_{PP} = \mathbb{C}_{PP}^T$ , tal como el lector puede fácilmente comprobarlo.

#### 4.8 Modelo Enriquecido Serie-Paralelo (ESP).

Fue precisado en la sección 4.5 que la hipótesis de iso-tensión en direcciones ortogonales a la fibra (comportamiento serie puro en direcciones transversales) constituye una cota inferior para la rigidez transversal del compuesto. Hecho que es confirmado por los resultados experimentales disponibles en la literatura.

Por este motivo, el modelo BSP necesita ser enriquecido con el objetivo de poder predecir el comportamiento transversal con mayor precisión.

Las ecuaciones de cierre BSP, a pesar de ser simples e intuitivas, presentan el problema de subestimación de rigidez transversal. El punto clave es que la microestructura cilíndrica de la celda 3D origina estados de tensión y de deformación en la matriz que no se pueden aproximar razonablemente con un campo uniforme sin una pérdida importante de realismo (ver Figura 4.2). La “composición de comportamientos constitutivos” es un enfoque basado en la representación de los dos materiales componentes a través de sólo un sistema de variables representativas del estado para cada fase. En presencia no de la uniformidad el valor promedio de tensiones serie dejar de ser la variable más apropiada para representar el estado de los materiales dado que se pierde una parte importante de información. La parte de la ecuación de cierre BSP (4.20) que involucra las tensiones y deformaciones transversales tiene que ser por lo tanto reconsiderada.



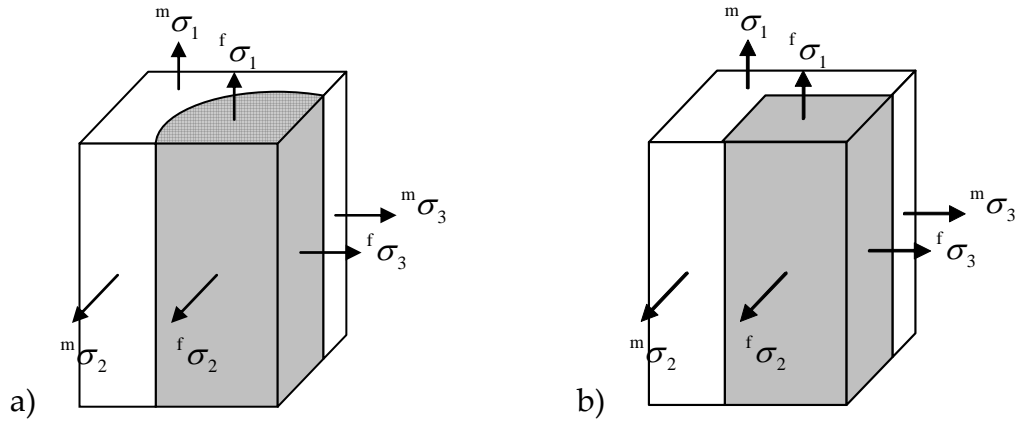


Figura 4.2 – Tensiones normales en los componentes. Celdas 3D real (a) y simplificada (b).

La no-uniformidad de los campos de la tensión y de deformación en las direcciones transversales se considerará mediante las asunciones siguientes:

1) dentro cada uno de los subdominios  ${}^m\Omega$  y  ${}^f\Omega$ , el cociente entre los promedios cuadráticos y lineales de las componentes de deformación se asume estar definido por dos tensores simétricos constantes  ${}^f\gamma$  y  ${}^m\gamma$ . Las componentes de estos tensores,  ${}^f\gamma_{ij}$  y  ${}^m\gamma_{ij}$ , se asumen definidas de la siguiente manera:

$${}^f\gamma_{ij} = \frac{\widehat{{}^f\epsilon_{ij}}}{{}^f\epsilon_{ij}} \quad {}^m\gamma_{ij} = \frac{\widehat{{}^m\epsilon_{ij}}}{{}^m\epsilon_{ij}} \quad (4.50)$$

2) Se asume la siguiente expresión de la energía  $U$  :

$$\begin{aligned} U &= U_P + U_S \\ U_P &= \frac{1}{2} {}^fk {}^f\sigma_P : \widehat{{}^f\epsilon_P} + \frac{1}{2} {}^mk {}^m\sigma_P : \widehat{{}^m\epsilon_P} = \frac{1}{2} \sigma_P : \bar{\epsilon}_P \\ U_S &= \frac{1}{2} {}^fk {}^f\sigma_S : \widehat{{}^f\epsilon_S} + \frac{1}{2} {}^mk {}^m\sigma_S : \widehat{{}^m\epsilon_S} = \frac{1}{2} \sigma_S : \bar{\epsilon}_S \end{aligned} \quad (4.51)$$

Utilizando una notación implícita más compacta, se emplean tensores lineales e invertibles de cuarto orden  ${}^f\mathbb{K}$  y  ${}^m\mathbb{K}$  para establecer las relaciones (4.50) entre los promedios cuadráticos y lineales de los tensores de deformación de fibra y matriz de la siguiente manera:

$$\widehat{{}^f\epsilon} = {}^f\mathbb{K} : \bar{{}^f\epsilon} \quad \widehat{{}^m\epsilon} = {}^m\mathbb{K} : \bar{{}^m\epsilon}. \quad (4.52)$$

Estos tensores son representados en notación matricial mediante las siguientes matrices diagonales:

$$\begin{aligned} {}^f\mathbb{K}_{[6 \times 6]} &= \mathbf{diag} \left( {}^f\gamma_1, {}^f\gamma_2, {}^f\gamma_3, {}^f\gamma_4, {}^f\gamma_5, {}^f\gamma_6 \right) \\ {}^m\mathbb{K}_{[6 \times 6]} &= \mathbf{diag} \left( {}^m\gamma_1, {}^m\gamma_2, {}^m\gamma_3, {}^m\gamma_4, {}^m\gamma_5, {}^m\gamma_6 \right). \end{aligned} \quad (4.53)$$

#### Comportamiento en la dirección paralela a las fibras

En lo que respecta al comportamiento en paralelo, se mantienen la misma hipótesis y argumentos utilizados en la ecuación de cierre BSP. Esto implica que, *dentro cada uno de los subdominios  ${}^m\Omega$  y  ${}^f\Omega$ , la parte paralela de los tensores de tensión y deformación resultan uniformes.* La hipótesis de uniformidad implica que coincidirán las componentes paralelas promedias y medias cuadráticas:

$$\begin{aligned} \widehat{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}_P} &= \overline{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}_P} & \widehat{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_P} &= \overline{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_P}, \\ \widehat{{}^f\boldsymbol{\sigma}_P} &= \overline{{}^f\boldsymbol{\sigma}_P} & \widehat{{}^m\boldsymbol{\sigma}_P} &= \overline{{}^m\boldsymbol{\sigma}_P}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

En la notación de Voigt las mismas relaciones quedan:

$$\begin{aligned} \widehat{{}^f\varepsilon_1} &= \overline{{}^f\varepsilon_1} & \widehat{{}^m\varepsilon_1} &= \overline{{}^m\varepsilon_1}, \\ \widehat{{}^f\sigma_1} &= \overline{{}^f\sigma_1} & \widehat{{}^m\sigma_1} &= \overline{{}^m\sigma_1}; \end{aligned}$$

por lo tanto esta asunción implica que:

$${}^f\gamma_{11} = 1, \quad {}^m\gamma_{11} = 1.$$

En virtud de (4.54), la condición de igualdad de deformaciones paralelas:

$$\overline{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \overline{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}_P}, \quad (4.55)$$

puede ser escrita igualmente usando las cantidades medias cuadráticas:

$$\widehat{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \widehat{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}_P}. \quad (4.56)$$

Además, la ecuación (4.5) implica entonces que la deformación paralela de los componentes coincidirá con la deformación paralela media de todo el compuesto:

$$\overline{{}^m\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \overline{{}^f\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}_P}.$$

#### Comportamiento en direcciones ortogonales a las fibras

Se presenta a continuación la generalización del comportamiento en serie (en las direcciones transversales).

Escribiendo en forma explícita la energía –ecuación (4.51)– implicada en el comportamiento serie  $U_s$ :

$$\frac{1}{2} {}^f k \widehat{{}^f \sigma_s} : \widehat{{}^f \epsilon_s} + \frac{1}{2} {}^m k \widehat{{}^m \sigma_s} : \widehat{{}^m \epsilon_s} = \frac{1}{2} {}^f k \sigma_s : \overline{{}^f \epsilon_s} + \frac{1}{2} {}^m k \sigma_s : \overline{{}^m \epsilon_s} \quad (4.57)$$

los términos homólogos a la izquierda y a la derecha de (4.57) se suponen iguales:

$$\frac{1}{2} {}^f k \widehat{{}^f \sigma_s} : \widehat{{}^f \epsilon_s} = \frac{1}{2} {}^f k \sigma_s : \overline{{}^f \epsilon_s}, \quad (4.58)$$

$$\frac{1}{2} {}^m k \widehat{{}^m \sigma_s} : \widehat{{}^m \epsilon_s} = \frac{1}{2} {}^m k \sigma_s : \overline{{}^m \epsilon_s}. \quad (4.59)$$

Puede ser reconocido fácilmente que cuando la hipótesis de uniformidad para las deformaciones serie se reintroduce:

$$\overline{{}^f \epsilon_s} = \widehat{{}^f \epsilon_s}, \quad \overline{{}^m \epsilon_s} = \widehat{{}^m \epsilon_s},$$

entonces las ecuaciones (4.58) y (4.59) recuperan la “clásica” ecuación serie empleada en las ecuaciones de cierre BSP (4.20):

$$\sigma_s = {}^m \bar{\sigma}_s = {}^f \bar{\sigma}_s = \bar{\sigma}_s.$$

De manera más general y mediante el empleo de (4.52), las ecuaciones (4.58) y (4.59) implican:

$$\sigma_s = {}^f \mathbb{K}^T : \widehat{{}^f \sigma_s}, \quad \sigma_s = {}^m \mathbb{K}^T : \widehat{{}^m \sigma_s}. \quad (4.60)$$

Como  ${}^f \mathbb{K}$  y  ${}^m \mathbb{K}$  son diagonales, entonces la parte serie de la ecuación de cierre generalizada se puede también escribir como:

$$\sigma_s = {}^f \mathbb{K} : \widehat{{}^f \sigma_s} = {}^m \mathbb{K} : \widehat{{}^m \sigma_s}. \quad (4.61)$$

Resumiendo, para considerar la no-uniformidad, los desarrollos previos conducen al siguiente sistema de ecuaciones de cierre ESP:

$$\begin{aligned} \widehat{{}^m \epsilon_p} &= \widehat{{}^f \epsilon_p} \\ {}^f \mathbb{K} : \widehat{{}^f \sigma_s} &= {}^m \mathbb{K} : \widehat{{}^m \sigma_s} \\ \widehat{{}^f \epsilon} &= {}^f \mathbb{K} : \overline{{}^f \epsilon}, \quad \widehat{{}^m \epsilon} = {}^m \mathbb{K} : \overline{{}^m \epsilon} \end{aligned}$$

Realizando el siguiente cambio de variables:

$${}^f \epsilon^* = {}^f \mathbb{K}^{-1} : \widehat{{}^f \epsilon}, \quad {}^m \epsilon^* = {}^m \mathbb{K}^{-1} : \widehat{{}^m \epsilon}, \quad (4.62)$$

$${}^f\boldsymbol{\sigma}^* = {}^f\mathbb{K} : \widehat{{}^f\boldsymbol{\sigma}}, \quad {}^m\boldsymbol{\sigma}^* = {}^m\mathbb{K} : \widehat{{}^m\boldsymbol{\sigma}}, \quad (4.63)$$

el sistema de ecuaciones ESP a resolver termina siendo análogo al sistema de ecuaciones que gobierna el modelo BSP:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\widehat{{}^c\boldsymbol{\sigma}}} = {}^c\mathbf{g} \left( \widehat{{}^c\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad {}^c\boldsymbol{\beta}, \quad \dot{\widehat{{}^c\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \\ \dot{{}^c\boldsymbol{\beta}} = {}^c\mathbf{h} \left( \widehat{{}^c\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad {}^c\boldsymbol{\beta}, \quad \dot{\widehat{{}^c\boldsymbol{\varepsilon}}} \right) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^* = {}^fk \quad {}^f\boldsymbol{\varepsilon}^* + {}^mk \quad {}^m\boldsymbol{\varepsilon}^* \\ \boldsymbol{\sigma}^* = {}^fk \quad {}^f\boldsymbol{\sigma}^* + {}^mk \quad {}^m\boldsymbol{\sigma}^* \\ {}^f\boldsymbol{\sigma}_S^* = {}^m\boldsymbol{\sigma}_S^* \\ {}^f\boldsymbol{\varepsilon}_P^* = {}^m\boldsymbol{\varepsilon}_P^* \end{array} \right. \quad \text{con } c = f, m. \quad (4.64)$$

de tal manera que puede emplearse el mismo algoritmo de solución desarrollado para el modelo BSP siendo la principal diferencia el cambio de variable correspondiente indicado en las expresiones (4.62) y (4.63).

Los coeficientes  ${}^f\gamma_{ij}$  y  ${}^m\gamma_{ij}$  se pueden calcular en base a un modelo micromecánico simplificado, como el que se detalla en el apartado siguiente.

#### 4.9 Cálculo de los coeficientes ${}^f\gamma$ y ${}^m\gamma$

El cálculo de coeficientes  ${}^f\gamma_{ij}$  y  ${}^m\gamma_{ij}$  que aparece en las matrices  ${}^f\mathbb{K}$  y  ${}^m\mathbb{K}$  se puede realizar mediante la adopción de modelos simplificados. En esta sección describimos el modelo micromecánico empleado para la definición de los coeficientes  ${}^f\gamma_{22}$ ,  ${}^f\gamma_{33}$ ,  ${}^m\gamma_{22}$  y  ${}^m\gamma_{33}$ .

Para la evaluación de los coeficientes respectivos a las tensiones normales transversales, se utilizará el esquema simplificado que se describe a continuación.

Dado que para las tensiones normales, la configuración deformada mantiene la simetría cilíndrica, los estados de tensión y deformación resultantes son independientes de la sección transversal particular del RVE considerado y el problema se puede analizar como un problema 2D en una sección transversal genérica.

En la Figura 4.3.a la sección transversal se simplifica a la unión de tres regiones rectangulares. Una región es ocupada por la fibra ( $f$ ) y las otras dos regiones son ocupadas por la matriz. Esta sección cuadrada del RVE, cuando está sujeta a una tensión transversal (horizontal en el gráfico), se asume que se comporta como el

sistema de tres muelles mostrados en la Figura 4.3.b. La región de la matriz, etiquetada ( $mp$ ), se comporta “en paralelo” con la región de la fibra y, por lo tanto comparte la misma tensión que la fibra, mientras que la región restante de la matriz, etiquetada ( $ms$ ), se comporta como un muelle conectado en serie. Los volúmenes de material implicado en las tres regiones se indican por consiguiente con los símbolos  $V_f$ ,  $V_{mp}$  y  $V_{ms}$ .

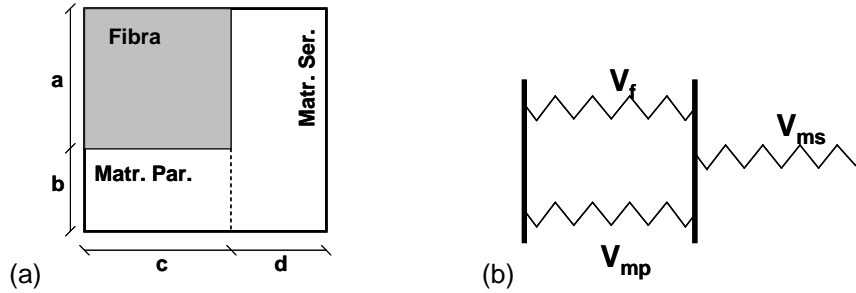


Figura 4.3 – a) Regiones de la sección transversal. b) Representación esquemática con muelles.

La fracción volumétrica de las subregiones de matriz se indican con:

$${}^{mp}k = \frac{V_{mp}}{V}, \quad {}^{ms}k = \frac{V_{ms}}{V}.$$

Evidentemente debe cumplirse que:  ${}^{mp}k + {}^{ms}k = {}^mk$ .

El símbolo  $\eta$  denota el cociente que mide la cantidad de matriz que se comporta en paralelo (con la fibra):

$$\eta = \frac{V_{mp}}{V_m}.$$

El cálculo de  ${}^f\gamma$  y  ${}^m\gamma$  se realiza en el rango elástico. Denotamos con  $E_f$  y  $E_m$  los módulos elásticos y con  $R$  su cociente:

$$R = \frac{E_f}{E_m}.$$

Con la simbología recientemente introducida, y siendo  $L = a + b = c + d$  la longitud del lado de la sección cuadrada del RVE, las dimensiones significativas pueden ser expresadas como:

$$\begin{aligned} a &= \frac{V_f}{V_f + V_{mp}} L = \frac{V_f}{V} \frac{V}{V_f + V_{mp}} L = \frac{{}^fk}{{}^fk + \eta {}^mk} L \\ b &= \frac{V_{mp}}{V_f + V_{mp}} L = \frac{V_{mp}}{V} \frac{V}{V_f + V_{mp}} L = \frac{\eta {}^mk}{{}^fk + \eta {}^mk} L \end{aligned} \quad (4.65)$$

Por lo tanto, suponiendo un espesor unitario de la sección transversal, la rigidez de cada muelle resulta:

$$X_f = R E_m \frac{a}{c}, \quad X_{mp} = E_m \frac{b}{c}, \quad X_{ms} = E_m \frac{L}{d}.$$

La rigidez del sistema constituido por los dos muelles conectados en paralelo está dada por la suma de las rigideces de los muelles componentes:

$$X_p = X_f + X_{mp} = \left( R \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \right) E_m.$$

Sin embargo, la condición de equilibrio para los muelles que están conectados en serie será:

$$X_p \varepsilon_p c = X_{ms} \varepsilon_{ms} d,$$

entonces:

$$(R a + b) \varepsilon_p = L \varepsilon_{ms}.$$

Considerando (4.65) se tiene:

$$\left( R \frac{a}{L} + \frac{b}{L} \right) \varepsilon_p = \varepsilon_{ms},$$

$$\frac{R {}^f k + \eta {}^m k}{{}^f k + \eta {}^m k} \varepsilon_p = \varepsilon_{ms};$$

Es importante destacar que siempre que  $R=1$ , entonces  $\varepsilon_p$  y  $\varepsilon_{ms}$  coinciden.

La deformación promedio resulta:

$$\overline{\varepsilon_m} = \frac{\varepsilon_{mp} V_{mp} + \varepsilon_{ms} V_{ms}}{V_m} = \varepsilon_p \eta + \varepsilon_{ms} (1-\eta)$$

mientras que la media cuadrática está dada, sin embargo, por:

$$\widehat{\varepsilon_m} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{mp}^2 V_{mp} + \varepsilon_{ms}^2 V_{ms}}{V_m}} = \sqrt{\varepsilon_p^2 \eta + \varepsilon_{ms}^2 (1-\eta)}$$

Adoptando la siguiente expresión:

$$\omega = \frac{R {}^f k + \eta {}^m k}{{}^f k + \eta {}^m k},$$

el parámetro  ${}^m\gamma$  resulta:

$${}^m\gamma = \frac{\widehat{\varepsilon_m}}{\varepsilon_m} = \frac{\sqrt{\eta + \omega^2(1-\eta)}}{\eta + \omega(1-\eta)}. \quad (4.66)$$

Sólo queda por relacionar  $\eta$  con la fracción volumétrica de fibra  ${}^fk$ . Esto puede ser hecho imponiendo la condición geométrica que la región de la fibra es cuadrada. Por consiguiente, se tendrá:

$$b = d,$$

por lo tanto,  $b$  puede ser extraída de la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{V_f} + b\right)^2 = V$$

resultando:

$$b = \sqrt{V} - \sqrt{V_f}.$$

El área de la región rectangular de la matriz etiquetada ( $mp$ ) es igual a:

$$V_{mp} = b\sqrt{V_f} = \sqrt{V}\sqrt{V_f} - V_f,$$

mientras que el área de la matriz viene dada por:  $V_m = V - V_f$ .

Lo que permitirá calcular la expresión final del cociente  $\eta$ :

$$\eta = \frac{V_{mp}}{V_m} \quad \text{entonces} \quad \eta = \frac{\sqrt{V}\sqrt{V_f} - V_f}{V - V_f} = \frac{\sqrt{\frac{V_f}{V}} - \frac{V_f}{V}}{1 - \frac{V_f}{V}},$$

$$\eta = \frac{\sqrt{{}^fk} - {}^fk}{1 - {}^fk} = \frac{\sqrt{{}^fk}(1 - \sqrt{{}^fk})}{(1 + \sqrt{{}^fk})(1 - \sqrt{{}^fk})} = \frac{\sqrt{{}^fk}}{1 + \sqrt{{}^fk}}. \quad (4.67)$$

Evidentemente, puesto que en la fibra la tensión sigue siendo uniforme, entonces  ${}^f\gamma = 1$ . Las ecuaciones (4.66) y (4.67) se emplean para conseguir los resultados numéricos expuestos posteriormente.

#### 4.10 Algoritmo de resolución del modelo ESP

Con el propósito de no recurrir a un algoritmo más complejo, y dado que las ecuaciones de gobierno (4.64) del modelo ESP mantienen la misma estructura de las ecuaciones de gobierno (4.21) del modelo BSP.

El resultado observable es un comportamiento más rígido del material más deformable (matriz) por medio de los parámetros gammas (4.50) que implican diversas ecuaciones de cierre (4.61) para explicar mejor morfología verdadera.

La estructura del nuevo algoritmo es similar al descrito en el apartado 4.6 , la única diferencia con el del modelo BSP es el uso de  $({}^m\boldsymbol{\varepsilon})^*$ ,  $({}^m\boldsymbol{\sigma})^*$  y  $({}^m\mathbb{C})^*$  en lugar de  ${}^m\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  ${}^m\boldsymbol{\sigma}$  y  ${}^m\mathbb{C}$  cuyas expresiones son:

$$({}^m\boldsymbol{\varepsilon})^* = [{}^m\mathbb{K}]^{-1} : {}^m\boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.68)$$

$$({}^m\boldsymbol{\sigma})^* = {}^m\mathbb{K} : {}^m\boldsymbol{\sigma} \quad (4.69)$$

$$({}^m\mathbb{C})^* = {}^m\mathbb{K} : {}^m\mathbb{C} : {}^m\mathbb{K} \quad (4.70)$$

donde:  ${}^m\mathbb{K} = \mathbb{P}_p : \mathbb{I} : \mathbb{P}_p + {}^m\gamma \mathbb{P}_s : \mathbb{I} : \mathbb{P}_s$ , que es otra manera de definir la (4.53).

Es importante destacar aquí que  ${}^f\gamma = 1$  y que por lo tanto no es necesario realizar cambio de variables para el material fibra.

Mediante las consideraciones micro-mecánicas descritas en el apartado 4.9, es posible adoptar valores del parámetro gamma ( ${}^m\gamma$ ) en función de la fracción volumétrica de la fibra ( ${}^fk$ ) y del cociente entre los módulos de Young de la fibra y de la matriz ( $R = {}^fE / {}^mE$ ).

La Figura 4.4 muestra una serie de curvas que han sido obtenidas mediante el empleo de las fórmulas (4.66) y (4.67) que permiten estimar valores del parámetro gamma para corregir la rigidez transversal y de cortante del compuesto. Por ejemplo:  ${}^m\gamma = 1.31$  para  $R = 20$  y  ${}^fk = 0.6$ .



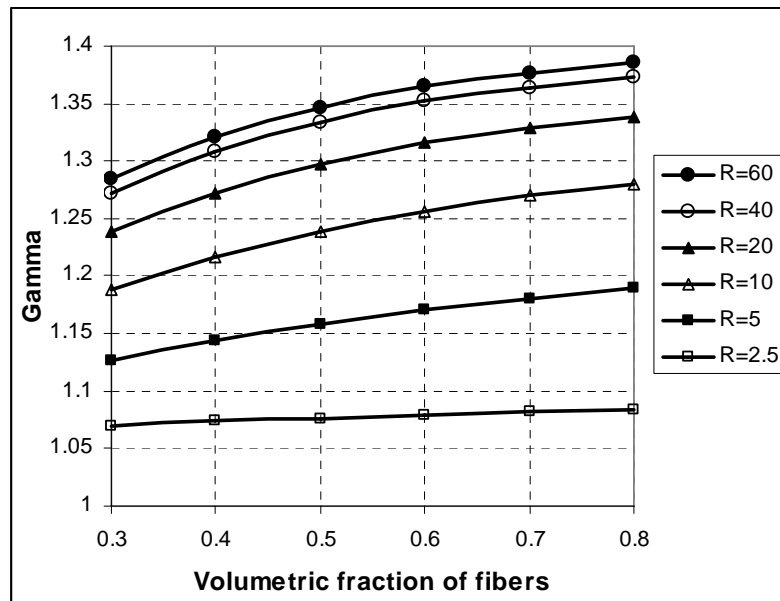


Figura 4.4 – Valores estimados de gamma en función de la fracción volumétrica de fibra para diferentes relaciones de rigideces.

Será demostrado en el capítulo de validación (capítulo 6) que el modelo básico SP, así como la ROM inversa, subestima los valores experimentales correspondientes a la rigidez transversal, mientras que el modelo enriquecido SP (con los parámetros gamma apropiados) obtiene una aproximación a los datos experimentales tan buena como la proporcionada por la ecuación semi-empírica de Halpin-Tsai [6].

## Referencias

- [1] Rastellini F, Oller S. (2004). "Modelado numérico de no linealidad constitutiva en laminados compuestos - Teoría de mezclas". Proceeding (CD) of: *Métodos Computacionais em Engenharia*. APMTAC, Lisboa (Portugal).
- [2] Salomón O, Rastellini F, Oller S, and Oñate E. (2005). "Fatigue prediction for composite materials and structures". NATO Symposium AVT-121, Granada (Spain) – Oct. 2005.
- [3] Dvorak GJ, Bahei-El-Din YA. (1987). "A bimodal plasticity theory of fibrous composite materials" *Acta Mech.* 219-241.
- [4] Rastellini F, Oller S, Salomón O, Oñate E. (2003). "Advanced serial-parallel mixing theory for composite materials analysis. Continuum basis and finite element applications". COMPLAS 2003, Proceeding (CD) of the *VII International Conference on Computational Plasticity*. CIMNE, Barcelona (Spain).
- [5] Hill R. (1964). "Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials: I. elastic behaviour". *J. Mech. Phys. Solids*, 12:199–212.
- [6] Halpin JC, Tsai SW. (1969). "Effects of environmental factors on composite materials". *Air Force Materials Lab-Technical report 67-423*, Department of Defense, (USA).



## 5 IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En este capítulo se detalla la implementación numérica del modelo constitutivo propuesto para compuestos en un código de elementos finitos. En primer lugar, se describen brevemente los problemas no-lineales que se presentan en la simulación numérica de estructuras de material compuesto, indicándose las fuentes de no-linealidad de cada problema, y se ilustran los esquemas de resolución.

Luego, se enfocan aspectos relativos al tratamiento numérico de los compuestos laminados como la elección del tipo de elemento para discretizar la geometría según el tipo de estructuras, la definición de elementos finitos compuestos laminados, la identificación de la orientación de materiales ortótropos, y el empleo de un laminado equivalente que permita disminuir el tiempo de cálculo tanto en elementos sólidos homogeneizados como en elementos tipo lámina.

Finalmente, se describe brevemente la implementación de dos tipos de elementos finitos compuestos: el sólido homogeneizado y el de lámina laminado.

### 5.1 Problemas no-lineales involucrados

La no-linealidad de un problema estructural, resuelto mediante FEM, puede tener varios orígenes. En los ejemplos abordados en el presente trabajo se estudia la no-linealidad constitutiva producida por la degradación elástica y/o plástica del

material. El modelo ha sido formulado para pequeñas deformaciones, y podría emplearse en problemas de no-linealidad geométrica debida a grandes desplazamientos.

La resolución de sistemas de ecuaciones no lineales requiere el empleo de métodos iterativos. Generalmente se utiliza el método de Newton-Raphson (N-R) dado que este método provee una rápida convergencia a la solución cuando se provee una buena aproximación inicial. El método en su versión completa (*full N-R*) requiere el cálculo de la matriz Jacobiana (o matriz tangente) en cada iteración.

En la simulación numérica de estructuras de material compuesto, existen varios problemas no-lineales anidados entre sí: 1) el problema global o estructural; 2) el problema local a nivel del material compuesto; y 3) los problemas locales a nivel de los materiales componentes. El problema global es el que busca el equilibrio entre las fuerzas externas e internas en la estructura. El problema local a nivel del compuesto es el que permite conseguir el equilibrio tensional entre las fases componentes. El problema local a nivel de los componentes (fibra y matriz) es el que resuelve la ecuación constitutiva, obteniendo la correspondiente evolución de sus variables internas.

Estos problemas anidados deben ser resueltos, como es lógico, desde los niveles inferiores (micro escala) hacia los niveles superiores (macro escala), y de manera iterativa dado que hay fuentes de no-linealidad en todos ellos. Por lo tanto, es de fundamental importancia que cada uno de ellos converja rápidamente a la solución, si se pretende simular el comportamiento de piezas industriales o de gran escala con el menor costo computacional. A continuación se describirán estos problemas y en el capítulo de validaciones (apartado 6.4) se mostrará la calidad de convergencia del modelo a través de ejemplos sencillos.

### **5.1.1 Problema global: equilibrio de fuerzas**

“Obtener el campo de desplazamientos de la estructura que cumpla con el equilibrio entre fuerzas externas e internas”.

La teoría FEM se puede formular con diversas perspectivas, sin embargo, su desarrollo para el análisis estructural sigue el enfoque más tradicional vía el principio de trabajos virtuales o el principio de la mínima energía potencial total. El enfoque del principio de los trabajos virtuales es más general dado que es aplicable tanto a comportamientos lineales como no lineales. El principio de desplazamientos virtuales, para un sistema estructural, expresa la igualdad matemática entre el trabajo virtual externo e interno:

$$\underbrace{\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV}_{\text{Trabajo Virtual Interno}} = \underbrace{\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dS}_{\text{Trabajo Virtual Externo}}, \quad (5.1)$$

donde  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  es el estado de deformación virtual correspondiente al desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}$ , y  $\boldsymbol{\sigma}$  es el estado de tensión en equilibrio con las fuerzas aplicadas (volumétricas  $\mathbf{b}$  y de superficie  $\mathbf{t}$ ) que actúan sobre el cuerpo de volumen  $V$  y superficie de contorno  $S$ .

A partir de la ecuación (5.1) se derivan las ecuaciones de equilibrio del Método de los Elementos Finitos. Sus expresiones finales pueden tomar diversas formas en función del tipo de análisis no-lineal a considerar (no-linealidad material, grandes desplazamientos, grandes deformaciones, etc.) [1]. La linealización de las ecuaciones permite obtener, de manera incremental, el campo de desplazamientos correspondiente con las fuerzas exteriores aplicadas, en función de la rigidez estructural y compatible con las condiciones de contorno. Las leyes constitutivas permiten obtener el campo de tensiones en función del campo de deformación calculados con los desplazamientos nodales. La integración de las tensiones en el volumen de cada elemento finito permite obtener las fuerzas internas que deberán ser equilibradas con las externas. El problema global consiste en eliminar, de manera iterativa, la fuerza residual que resulta de la diferencia entre fuerzas externas e internas, generalmente, mediante el método de Newton-Raphson.

El esquema de resolución del problema global (bucle externo) se muestra en la Figura 5.1 donde se indica también el proceso iterativo del problema local del modelo para el compuesto (bucle interno) con la estrategia de desacoplamiento de las fases componentes. Nueve pasos pueden ser identificados:

- i. Paso de incremento de carga,
- ii. Cálculo del incremento de desplazamientos,
- iii. Determinación del incremento de deformaciones totales,
- iv. Actualización del campo de deformaciones del compuesto,
- v. Determinación del estado de deformación de los componentes mediante desacoplamiento de fases,
- vi. Evaluación de tensores de tensión de los componentes,
- vii. Verificación del cumplimiento de las ecuaciones de equilibrio,
- viii. Determinación del tensor de tensiones del compuesto,
- ix. Determinación de tensor tangente constitutivo del compuesto,
- x. Obtención de fuerzas residuales y chequeo de convergencia,

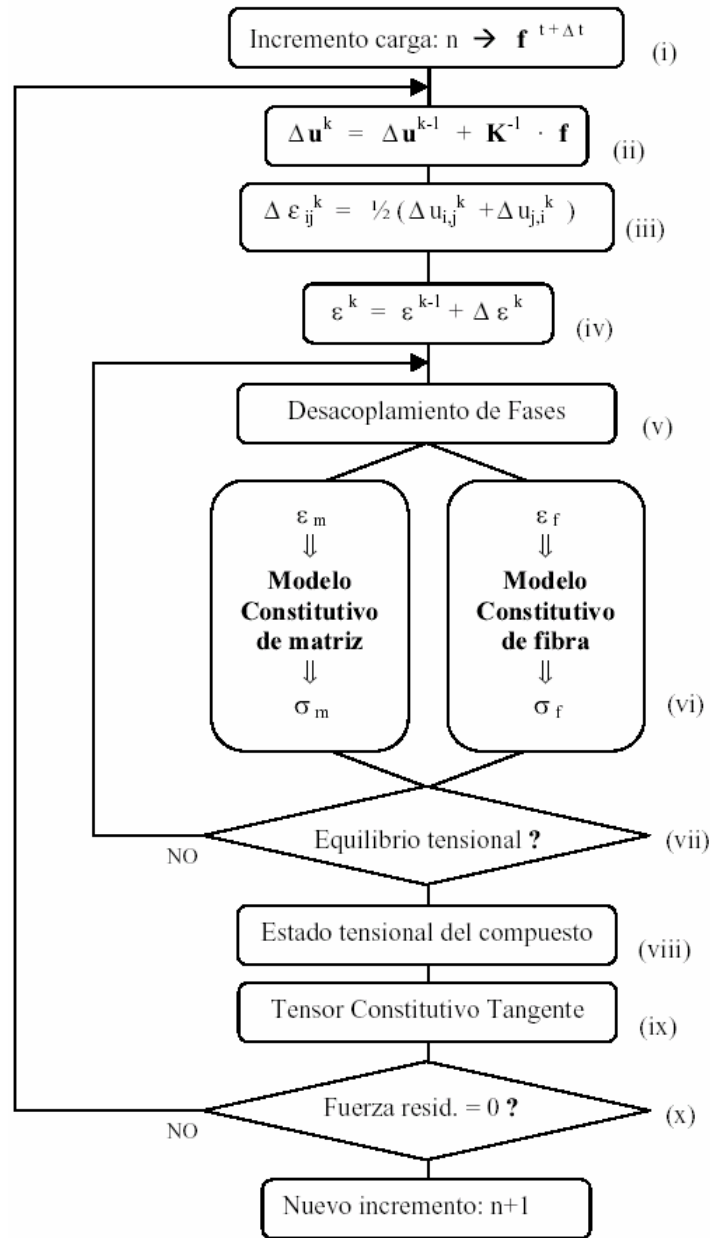


Figura 5.1 – Esquema de resolución del problema global no-lineal con indicación del proceso iterativo interno del modelo para compuestos.

Los pasos v, vi y vii sintetizan un procedimiento más extenso (desarrollado en el capítulo anterior) consistente en el algoritmo de resolución del modelo propuesto para compuestos unidireccionales que se esquematiza en la Figura 5.2 y se detalla en la Figura 5.3.

### 5.1.2 Problema local del material compuesto: equilibrio tensional entre componentes

“Obtener el campo de deformaciones de los materiales componentes que cumpla con el equilibrio tensional establecido por las ecuaciones de cierre del modelo compuesto”.

Las ecuaciones de cierre (4.19) y (4.20) propuestas para el modelo de compuesto, establecen la compatibilidad de deformaciones y el equilibrio tensional que debe verificarse entre los materiales componentes. En general, este proceso es no-lineal y por este motivo es necesario emplear un método iterativo. La Figura 5.2 permite identificar los pasos a realizar, empleando el método de Newton, para resolver el problema local del compuesto.

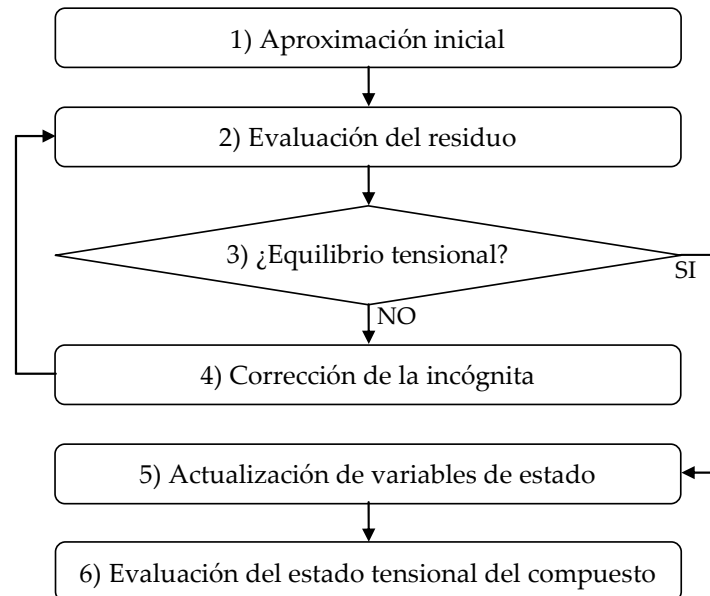


Figura 5.2 – Esquema del método de Newton para la resolución del modelo para compuestos.

La Figura 5.3 muestra el diagrama de flujo detallado del algoritmo de resolución del modelo compuesto que ha sido desarrollado en el capítulo anterior (ver apartado 4.6).

El operador tangente del modelo compuesto, calculado en base a los operadores tangentes de los modelos constitutivos de los componentes (ver apartado 4.7), permitirá que el problema global pueda converger rápidamente hacia la solución. Tanto la convergencia local como la global serán cuadráticas siempre que los modelos de los materiales componentes provean sus correspondientes operadores tangentes consistentes.



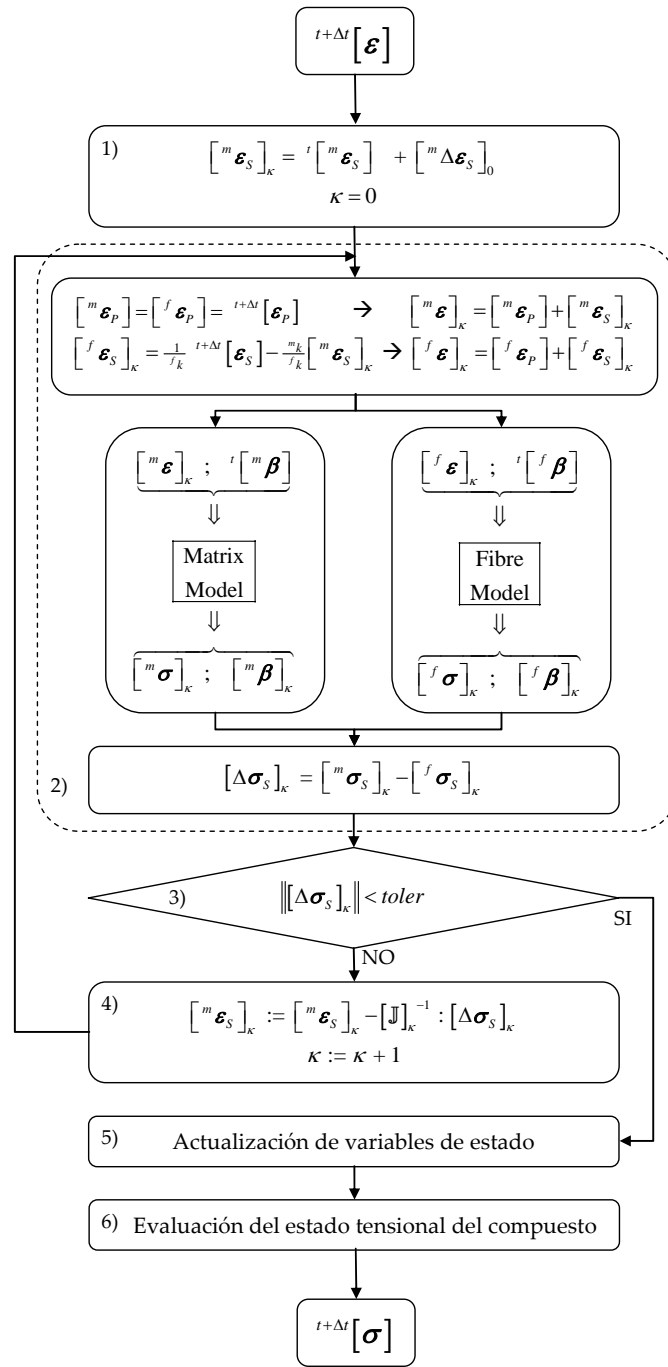


Figura 5.3 – Diagrama de flujo del modelo propuesto para compuestos unidireccionales.

### 5.1.3 Problema local en cada material componente: obtención de variables internas

Tanto en la fibra como en la matriz, se debe resolver el siguiente problema local: “obtener las variables internas del modelo constitutivo de cada material componente que, verificando las hipótesis de cada modelo en particular, cumplan con la condición de disipación mecánica positiva” (método de Coleman [2]).

La disipación mecánica de la energía debe ser positiva para dar cumplimiento a la segunda ley de la termomecánica resumida en la inecuación de Clausius-Duhem. Ver Truesdell & Noll (1965) [3].

La forma más utilizada para resolver ecuaciones constitutivas no lineales es a través de métodos del tipo *Euler-backward*.

En el caso de plasticidad, este proceso se denomina *return mapping* y consiste en obtener el vector de flujo plástico que verifique las condiciones de consistencia y permanencia de Kuhn-Tucker [4]. En el caso más general este procedimiento es no-lineal, pero puede ser lineal cuando el modelo plástico posee superficies de fluencia particulares como la “J2” siendo el flujo asociado (plasticidad J2).

Se describe brevemente el procedimiento usualmente empleado en la integración de la ecuación constitutiva para obtener la actualización del tensor de tensiones de un material componente elastoplástico.

Se emplea un esquema predicción-corrección (por ejemplo, el método de Newton-Raphson) que permita devolver el estado tensional a la superficie de fluencia en el caso de que se haya producido plastificación. Es decir, para un incremento del estado de deformaciones  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , se actualizaría el estado tensional según la siguiente expresión:

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \mathbb{C}:\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbb{C}:\int_t^{t+\Delta t} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt, \quad (5.2)$$

Existen diversas estrategias para calcular la integral de la ecuación (5.2) de forma discreta, pero usualmente se la aproxima empleando la regla trapezoidal que propone:

$$\int_t^{t+\Delta t} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt \approx \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta t \left[ (1-\alpha) {}^t\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \alpha {}^{t+\Delta t}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \right], \quad (5.3)$$

Si se considera  $\alpha=0$ , se obtiene el método de *Euler-forward*; aunque dicho esquema conduce de forma sencilla a una solución de naturaleza explícita, no es recomendable porque, en general, los errores se acumulan rápidamente. En cambio,  $\alpha = \frac{1}{2}$  es de uso bastante corriente y da lugar al método de *Crank-Nicolson* [5]. Finalmente, si se toma  $\alpha=1$ , el método recibe el nombre de *Euler-backward*, esta última opción implícita tiene la ventaja de resolver la ecuación diferencial de manera incondicionalmente estable y permite avanzar con pasos largos de tiempo (grandes incrementos de carga).

## 5.2 Tratamiento numérico de los compuestos laminados

### 5.2.1 Discretización de la geometría según el tipo de estructuras

Las estructuras laminadas de gran espesor, generalmente se construyen mediante la superposición de textiles de fibra que se van acomodando manualmente al molde de la pieza estructural hasta alcanzar el espesor deseado, para luego inyectar la resina mediante un proceso denominado RTM (*Resin Transference Molding*). El modelado numérico de este tipo de estructuras, de gran espesor, se realiza utilizando elementos finitos sólidos para discretizar su geometría.

En cambio, las estructuras laminadas de espesor delgado tienen un proceso constructivo diferente: se utilizan láminas pre-impregnadas de resina, denominadas “*pre-pregs*”. Este procedimiento permite lograr estructuras muy delgadas donde las dimensiones planas superan uno o dos órdenes de magnitud la dimensión del espesor; que generalmente son sometidas a esfuerzos membranales y de flexión. La discretización de su geometría con elementos sólidos no es posible y, por tanto, debe utilizarse elementos finitos de tipo lámina que puedan tener en cuenta la característica laminada de estos materiales compuestos.

### 5.2.2 Elementos finitos compuestos laminados

El modelo constitutivo propuesto puede ser combinado con varios tipos de elementos finitos, ya sean sólidos o del tipo lámina. La asociación de un elemento finito con la ley constitutiva para compuestos se denominará “elemento compuesto”. Esta adaptación requiere la ampliación del mapa de memoria asociado a cada elemento para que pueda almacenar la base de datos del material compuesto y de sus componentes. Los “elementos compuestos” que se han sido implementados en el programa COMET [9] son del tipo sólido y del tipo lámina. En ambos casos es necesario tener en cuenta estructura laminada. Los elementos “compuestos” 3D sólidos (ver apartado 5.3) que pueden emplearse son tetrahedros y hexahedros isoparamétricos, lineales o cuadráticos [6]. En los ejemplos de validación y aplicación del presente trabajo se utilizan “elementos compuestos laminados” del tipo sólido hexahédrico isoparamétrico lineal (de ocho nodos), y del tipo lámina DKT-CST (que se describe en el apartado 5.4).

### 5.2.3 Orientación del material

Las estructuras de material compuesto como las estructuras de material anisótropo en general, presentan la característica particular de que la orientación del material suele variar en determinadas zonas, normalmente siguiendo la

geometría de la estructura. Tal es el caso de estructuras con simetría cilíndrica, por ejemplo, en las cuales las propiedades del material ortótropo se suelen definir en las direcciones radial, axial y tangencial. Al adoptar un sistema de referencia cartesiano para realizar la simulación numérica, surge la necesidad de definir el cambio o rotación del sistema local del material (en el cual fueron definidas sus propiedades) al sistema global de la estructura para definir la orientación real del material. Se denominará sistema de referencia local “del material” a aquel sistema de ejes coordenados que permite definir tal orientación, generalmente mediante los tres ángulos de Euler (ver Figura 5.4).

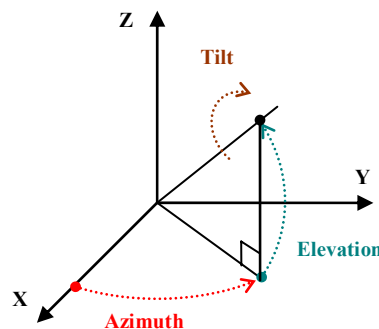


Figura 5.4 – Ángulos de Euler para definir la orientación del material.

Definir el cambio de orientación de un material para cada elemento finito de la malla que discretiza la estructura no es una tarea sencilla. Razón por la cual resulta indispensable contar con un módulo apropiado de preproceso que permita la definición ágil de sistemas de referencia locales de material para cada elemento de la malla, en función de la geometría del problema.

Este módulo, escrito en lenguaje Tcl-Tk, forma parte de una interfaz gráfica de usuario, específica para materiales compuestos laminados, desarrollada a través del proyecto europeo COMPASS [7]. Dicha interfase permite vincular el pre y pos procesador GiD [8] con el código de cálculo FEM COMET [9].

La “orientación local” del material compuesto (laminado) debe calcularse para cada elemento finito. Información que será posteriormente volcada en el archivo de entrada de datos del programa FEM, el cual la almacenará para emplearla durante el proceso de cálculo.

A partir de esta “base local elemental” se obtiene cada base local de capa (o *layer*) en función de la orientación de las fibras que la componen, razón por la cual también se la denomina “base local de fibra” (ver Figura 5.5).

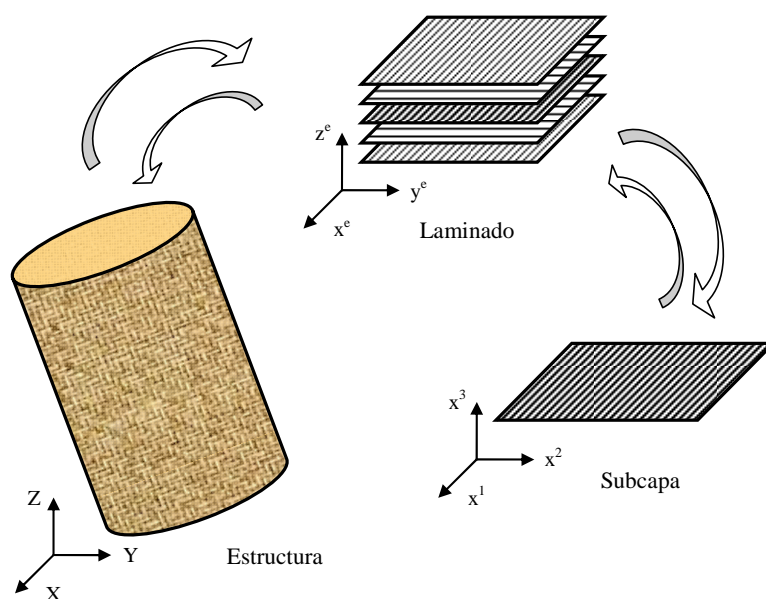


Figura 5.5 – Esquematización de cambios de base: de global (estructura) a “local de elemento” (laminado), y de “local de elemento” a “local de fibra” (subcapa).

## 5.2.4 Laminado equivalente

### a) en elementos sólidos homogeneizados

Un laminado real puede estar constituido de muchas capas y subcapas para lograr conseguir un determinado espesor total que otorgue resistencia a la pieza estructural. Si el apilado de capas es repetitivo, se puede prescindir de la posición exacta de cada capa y considerar un material compuesto homogeneizado equivalente. En este caso se pueden emplear elementos finitos sólidos homogéneos en cuyos puntos de integración se considera un material ortótropo homogeneizado cuyo comportamiento constitutivo viene dado por el enfoque propuesto. Por lo tanto, a los efectos de la modelación numérica y cuando se utilizan elementos sólidos “homogeneizados”, sólo es necesario conocer la fracción volumétrica de las capas representativas de cada dirección. El empleo de este laminado equivalente, en la entrada de datos para la definición del material, evita que el programa realice cálculos innecesarios. La Figura 5.6 muestra un ejemplo de obtención de un laminado equivalente numéricamente (para elementos sólidos) a partir de un laminado real.

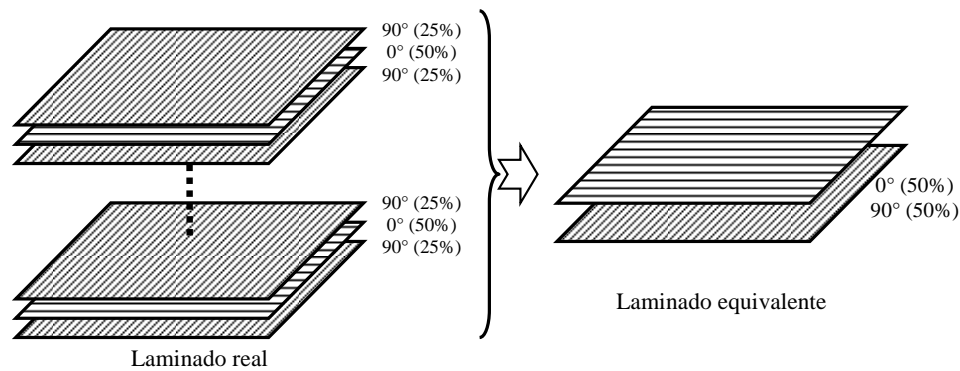


Figura 5.6 – Ejemplo de laminado real y laminado equivalente para elementos sólidos homogeneizados.

Nótese que la equivalencia conseguida radica en el igual comportamiento membranal del laminado. Este tipo de equivalencia es suficiente cuando se utilizan elementos sólidos, dado que el laminado queda homogeneizado en un único material anisotrópico mediante el empleo del modelo constitutivo compuesto. Se considera que todas las capas del laminado son coplanares y coexistentes en cada punto material. Es decir que cada punto de integración posee la información completa de todo el laminado.

En otras palabras, al utilizar un elemento compuesto sólido, el laminado real queda homogeneizado en el interior del elemento; y es por este motivo que la posición física de cada capa es irrelevante. También pierde relevancia el espesor real de cada capa, dado que lo único significativo es el espesor relativo que permitirá calcular las fracciones volumétricas de cada capa.

#### ***b) en elementos tipo lámina***

En el caso de elementos tipo lámina, son de importancia tanto el comportamiento membranal como el de flexión, y por lo tanto un laminado equivalente para este tipo de elemento finito no podrá ser coplanar.

Las capas del laminado equivalente tendrán que poseer un determinado espesor que otorgue igual rigidez membranal, y una determinada posición que proporcione igual rigidez flexional que el laminado real. Además tendrán que poseer simetría respecto del plano medio siempre que el laminado real sea simétrico.

La equivalencia membranal queda asegurada si el espesor  $h_e$  de las capas equivalentes, representativas de cada tipo-orientación, es igual a la suma de los espesores  $h_i$  de las capas del mismo tipo en el laminado real.

$$h_e = \sum h_i . \quad (5.4)$$

La equivalencia a flexión se consigue cuando las posiciones de las capas equivalentes son obtenidas de manera tal que el momento de inercia, respecto del plano neutro, de una capa equivalente sea igual a la sumatoria de los momentos de inercia de las capas representadas pertenecientes al laminado real. Esta igualdad es reflejada en la siguiente ecuación que permite calcular la posición  $z_e$  de la capa equivalente “e”:

$$z_e^2 \cdot h_e = \sum (z_i^2 \cdot h_i) \Rightarrow z_e = \sqrt{\frac{\sum (z_i^2 \cdot h_i)}{h_e}}, \quad (5.5)$$

siendo “i” todas las capas de un mismo tipo y orientación (ej.: carbono 45°) que estarán representadas por la capa equivalente “e”.

LAYER ID	Fiber type	Vf [%]	ANGLE [°]	THICK [mm]	POSIT [mm]
1	Carbon	44.9	45	0.225	1.485
2	Carbon	44.9	-45	0.225	1.485
3	Glass	36.07	45	0.05	1.16
4	Glass	36.07	-45	0.05	1.16
5	Carbon	44.9	45	0.05	1.16
6	Carbon	44.9	-45	0.05	1.16
7	Glass	36.07	45	0.215	0.8451
8	Glass	36.07	-45	0.215	0.8451
9	Glass	36.07	45	0.05	0.5299
10	Glass	36.07	-45	0.05	0.5299
11	Carbon	44.9	45	0.05	0.5299
12	Carbon	44.9	-45	0.05	0.5299
13	Glass	36.07	45	0.215	0.21495
14	Glass	36.07	-45	0.215	0.21495

Tabla 5.1 – Datos correspondientes a un laminado híbrido real (simétrico de 28 capas).

LAYER ID	Fiber type	Vf [%]	ANGLE [°]	THICK [mm]	POSIT [mm]
1	Carbon	44.9	45	0.325	1.333
2	Carbon	44.9	-45	0.325	1.333
3	Glass	36.07	45	0.53	0.680
4	Glass	36.07	-45	0.53	0.680

Tabla 5.2 – Datos característicos del laminado híbrido equivalente (simétrico de 8 capas).

A modo de ejemplo, se muestran los datos (Tabla 5.1) de un laminado real híbrido con fibras de carbono y vidrio, y los datos del laminado equivalente (Tabla 5.2) obtenido mediante el procedimiento descrito recientemente. La sumatoria de los espesores de todas las capas en ambos laminados es de 3,42 mm. El laminado real consta de 28 capas y el equivalente sólo posee 8. Nótese que dada la simetría de ambos laminado en las tablas sólo se indican las capas cuya posición respecto del plano neutro es positiva.

Observación importante: El empleo de capas equivalentes disminuye considerablemente el tiempo de cálculo, pero no permite estudiar el proceso

individual de degradación de las capas del laminado real que hayan sido reemplazadas por una equivalente. La solución a este problema es no incluir todas las capas en el cálculo de las equivalentes. Es decir, el laminado para la simulación numérica tendrá que incluir las capas exteriores del laminado real, que suelen ser las más desfavorables, más las equivalentes de las capas interiores (ver Tabla 5.3).

LAYER ID	Fiber type	Vf	ANGLE	THICK [mm]	POSIT [mm]
1	Carbon	44.9	45	0.225	1.485
2	Carbon	44.9	-45	0.225	1.485
3	Carbon	44.9	45	0.01	0.902
4	Carbon	44.9	-45	0.01	0.902
5	Glass	36.07	45	0.53	0.680
6	Glass	36.07	-45	0.53	0.680

Tabla 5.3 – Datos característicos del laminado híbrido equivalente (simétrico de 12 capas) que incluye las capas exteriores del laminado real.

Este último laminado disminuiría el costo computacional sin tener que considerar todas las capas del laminado real, y a la vez permitiría estudiar el comportamiento de las capas más desfavorables como lo son las exteriores para el caso de flexión.

### 5.3 Elemento sólido compuesto homogeneizado

En los elementos sólidos homogeneizados, cada punto de integración tiene la información completa (variables y constantes) de todo el laminado

Para obtener la respuesta del laminado compuesto en dicho punto de integración, se toman las siguientes hipótesis:

- el estado de deformación (en coordenadas globales) es el mismo para todas las capas del laminado,
- todas las capas coexisten en el mismo punto material,
- cada capa participa en la respuesta global en proporción a su fracción volumétrica.

El comportamiento en cada capa unidireccional se obtiene con el modelo de compuestos propuesto, en el sistema de coordenadas local de cada capa. La resistencia y rigidez del laminado se obtiene realizando la suma ponderada de las contribuciones de cada capa, en el sistema de coordenadas global. La Figura 5.7 muestra el procedimiento descrito para el tratamiento del compuesto laminado en cada punto de integración de un elemento finito, donde  $V_k$  es la fracción



volumétrica de la capa “ $l$ ”; y  ${}^l\mathcal{R}_{ijJ}$  es el tensor de rotación para cambiar de la base global a la local de cada lámina, que se define como:

$$\mathcal{R}_{ijJ} = r_{ij} \, r_{IJ}, \quad (5.6)$$

donde  $r_{ij} = \cos \left[ \left( \vec{e}_i \right)_{global}, \left( \vec{e}_j \right)_{local} \right]$ , siendo  $\vec{e}_i$  el versor unitario correspondiente a la componente  $i$ -ésima del sistema de referencia coordenado.

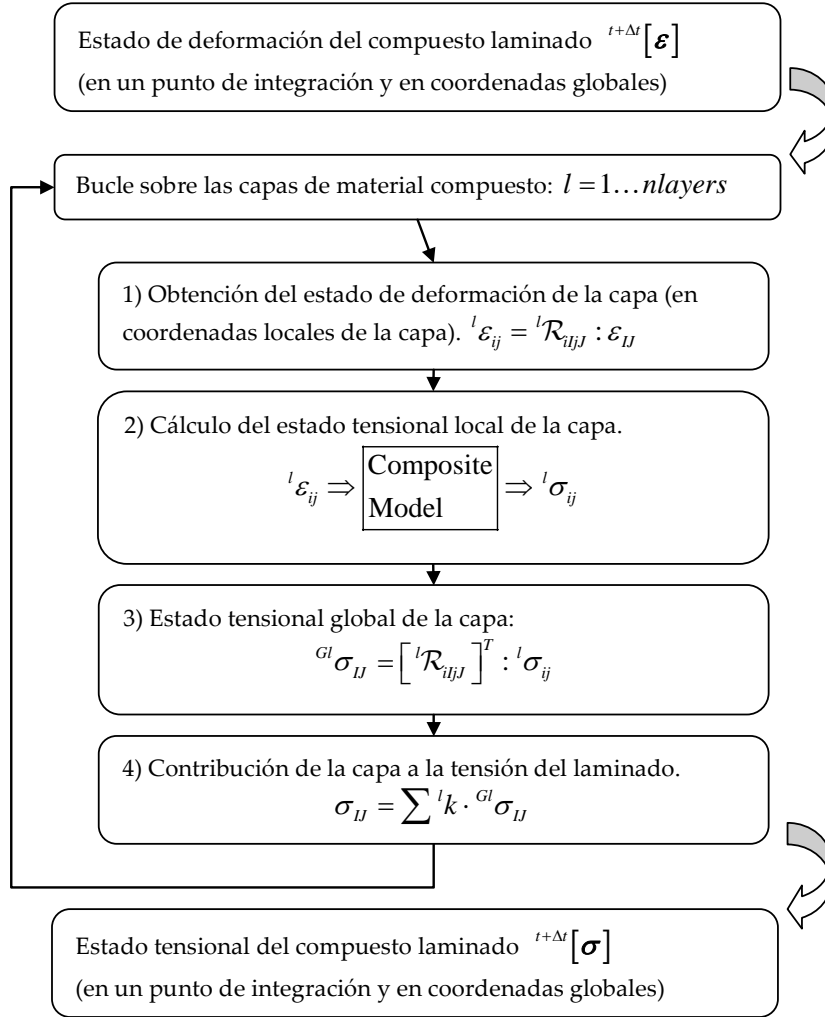


Figura 5.7 – Procedimiento para la obtención del estado tensional de un material compuesto laminado en un punto de integración de un elemento finito sólido.

## 5.4 Elemento lámina laminado

Un enfoque ampliamente aplicado en el análisis mecánico de estructuras de lámina laminadas consiste en utilizar teorías de “capa única equivalente” (ESL, *Equivalent Single Layer theories*).

Estas teorías condensan el laminado en una sola capa equivalente con el objetivo de utilizar las mismas hipótesis cinemáticas empleadas en el comportamiento membranal y flexional de los elementos clásicos de lámina homogéneos. El uso de este tipo de teorías permite el desarrollo de elementos lámina laminados que simplifican el problema estructural y que consecuentemente reducen el tiempo de cálculo computacional.

#### 5.4.1 Análisis de estructuras laminadas

El análisis de estructuras construidas con laminados de material compuesto reforzado con fibras largas (*FRP laminates*), en realidad, presenta muchos desafíos. La constitución heterogénea y anisótropa de este tipo de estructuras laminadas, condiciona la respuesta macroscópica en la cual intervienen muchos fenómenos que pueden ocurrir en escalas geométricas sumamente diversas, es decir a nivel global (o de laminado), a nivel de cada capa, o a nivel microscópico de los componentes (fibra y matriz). A nivel de capa, los compuestos laminados exhiben a menudo concentraciones de tensión transversal cerca de las discontinuidades del material y geométricas (efecto de borde libre) que pueden conducir al daño en forma de delaminación, agrietamiento de matriz y/o separación de la unión adhesiva. Una vez que el daño se produce de manera significativa a nivel de capa, la descripción cinemática y material del problema debería ser cambiada antes de que un análisis posterior pueda realizarse.

Cuando el principal objetivo del análisis es determinar la respuesta global del componente laminado (por ejemplo, grandes desplazamientos, cargas críticas de pandeo, modos fundamentales de vibración, etc.), las teorías ESL simplificadas se pueden utilizar para determinar exactamente tal comportamiento global y, especialmente para laminados muy delgados, el problema entonces se simplifica fuertemente.

Un análisis más preciso que incluya la evaluación de regiones donde se pudiera localizar un potencial inicio de daño, requiere la determinación del estado tridimensional de la tensión y de la tensión en el nivel de la capa. Las teorías ESL simples de laminación son incapaces de determinar exactamente el campo de tensión 3D a nivel de cada capa, dado que la simplificación de la cinemática a lo largo del espesor implica una discontinuidad en la interfase del campo de tensiones que puede no cumplir con el equilibrio tensional en esta dirección.

Para laminados delgados, el error introducido debido a las tensiones interlaminares discontinuas puede ser insignificante; no obstante para laminados gruesos, las teorías ESL pueden dar resultados erróneos para todas las tensiones, requiriendo el empleo de teorías con una cinemática más rica tales como un análisis completo 3D (v.g.: Pagano & Hatfield [10], Srinivas & Rao [11], Noor [12],

Savoia & Reddy [13], Varadan & Bhaskar [14], Ren [15]) o teorías *layer-wise* que asumen campos de desplazamientos que proporcionan una representación más correcta cinemáticamente de la curvatura de la sección transversal asociada a la deformación de laminados gruesos (v.g.: Whitney [16], Swift & Heller [17], Seide [18], Chaudhuri [19], Reddy [20], Barbero *et al.* [21], Owen & Li [22], Carrera [23]).

La solución específica adoptada en el presente trabajo es la siguiente: para los elementos estructurales más gruesos se considerará un análisis de 3D FEM con elementos hexahédricos isoparamétricos para una determinación exacta de la tensión 3D y de la tensión en cada lámina lo que permitirá determinar las regiones de posible iniciación del daño.

Para elementos estructurales más delgados se empleará un análisis FEM con elementos de lámina cuyo comportamiento a flexión esta basado en una extensión ESL de la teoría clásica de placas delgadas de Kirchhoff, que asume que las normales transversales son inextensibles y que permanecen ortogonales a la deformada del plano medio.

#### 5.4.2 Teoría ESL empleada

En las teorías de lámina laminadas que utilizan el concepto de capa única equivalente (ESL), el problema del continuo 3D es reducido a un problema 2D, tratando la placa laminada heterogénea como sola lámina estáticamente equivalente pero que posee un comportamiento constitutivo complejo. El punto clave en estas teorías es la caracterización del campo de desplazamientos que se asume estar determinado por la misma representación usada para las teorías de lámina homogénea:

$$\mathbf{u}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\zeta) \boldsymbol{\varphi}_j(\xi, \eta). \quad (5.7)$$

En (5.7),  $\xi$  y  $\eta$  son las coordenadas de la representación paramétrica de la superficie media,  $\zeta$  es la coordenada en la dirección del espesor. Las funciones vectoriales  $\boldsymbol{\varphi}_j(\xi, \eta)$  tienen que ser consideradas como campos independientes mientras que las funciones escalares a lo largo del espesor  $\phi_j(\zeta)$  dependen de la teoría específica de la lámina equivalente seleccionada. En particular, al calcular los integrales 3D de la formulación variacional específica adoptada para la mecánica, la utilización de (5.7) permite las siguientes descomposiciones para las funciones a ser integradas  $H(\xi, \eta, \zeta)$  y el integral relacionado:

$$\iiint_V H(\xi, \eta, \zeta) dV = \iiint_V F(\zeta) G(\xi, \eta) dV = \iint_A \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F(\zeta) dz \right] G(\xi, \eta) dA. \quad (5.8)$$

La teoría específica de laminado empleada para el análisis de las estructuras laminadas delgadas consideradas en este trabajo es la extensión natural de la teoría estructural usada para la formulación del elemento homogéneo DKT-CST (detallado en el Apéndice y en [24]) pero considerando que las capas pueden ser heterogéneas. El único aspecto de la formulación DKT-CST que necesita ser reconsiderado es la integración en el espesor que ahora tiene que considerar las distintas capas del proceso de laminación. La diferencia consiste en la integración

a lo largo del espesor representada por el término  $\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} F(\zeta) dz$ . Mientras que para la teoría homogénea esta integral fue realizada analíticamente, para una estructura laminada ahora tiene ser realizada capa a capa y empleando cuadratura numérica.

El apilado de la estructura, compuesta de  $N_L$  capas o *layers*, es considerada mediante un arreglo de intervalos continuos  $[z_l, z_{l+1}]$  tal como se ilustra en la Figura 5.8.

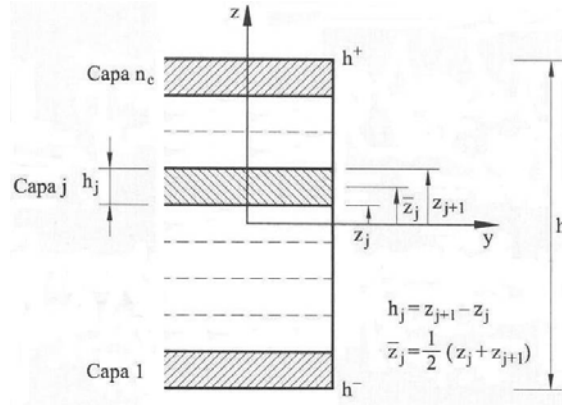


Figura 5.8 – Coordenadas para la integración de propiedades a través de las capas.

Una diferencia importante con la teoría homogénea es que ahora el acoplamiento entre los comportamientos de membrana y flexión, incluso en presencia de una forma plana, no se puede excluir a priori. Por lo tanto en la expresión de la energía elástica, las deformaciones generalizadas de membrana  $\hat{\epsilon}'_m$  y de flexión  $\hat{\epsilon}'_b$  tienen que ser consideradas al mismo tiempo. El estado de deformación total en una capa  $\epsilon'$  se relaciona con las deformaciones generalizadas de membrana y flexión de la placa mediante la siguiente ecuación:

$$\epsilon'(z) = \begin{Bmatrix} \epsilon_x(z) \\ \epsilon_y(z) \\ \gamma_{xy}(z) \end{Bmatrix} = \hat{\epsilon}'_m + z \hat{\epsilon}'_b. \quad (5.9)$$

La Figura 5.9 muestra la que la distribución de deformaciones resulta lineal a lo largo del laminado como consecuencia de la adopción de la teoría ESL adoptada.

También muestra la distribución de tensiones normales comparando el caso de material homogéneo con el de material compuesto. En este último se produce una discontinuidad entre capas contiguas debido a que generalmente poseen rigideces distintas.

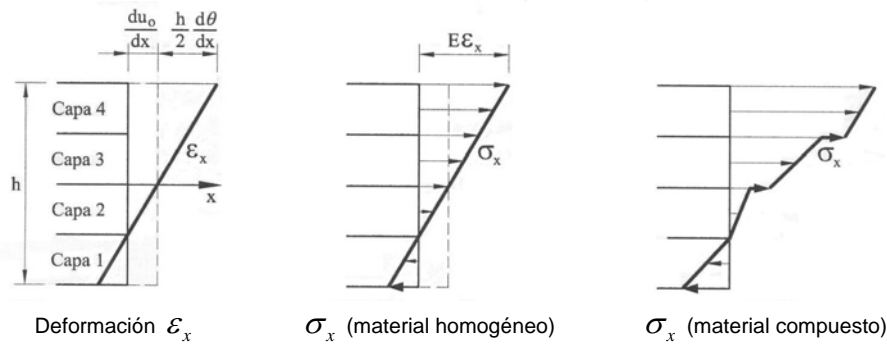


Figura 5.9 – Distribución de las deformaciones y las tensiones normales en la dirección x para un material homogéneo y un compuesto laminado [25].

Asumiendo un estado plano de tensión en cada capa, se pueden evaluar los estados tensionales de capa empleando el modelo propuesto para compuestos unidireccionales. Lo que permitirá obtener los esfuerzos o tensiones generalizadas del laminado (ver Figura 5.10):

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}'_m = \int z \sigma'(z) dz &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \bar{z}_l \begin{Bmatrix} {}^l\sigma_x \\ {}^l\sigma_y \\ {}^l\tau_{xy} \end{Bmatrix} h_l \right] \\ \hat{\sigma}'_b = \int \sigma'(z) dz &\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \begin{Bmatrix} {}^l\sigma_x \\ {}^l\sigma_y \\ {}^l\tau_{xy} \end{Bmatrix} h_l \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

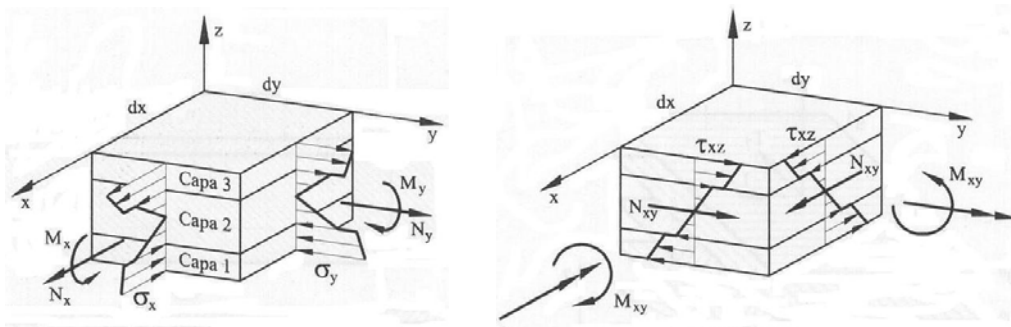


Figura 5.10 – Convenio de signos para tensiones y esfuerzos en una placa DKT multilaminada [25].

La matriz tangente de tensión plana de cada capa “ $l$ ” se denota con  $D_l$ . Por consiguiente, la energía de deformación es:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \iint_A \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \int_{z_l}^{z_{l+1}} (\boldsymbol{\varepsilon}'_m + z \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b)^T \mathbf{D}_l (\boldsymbol{\varepsilon}'_m + z \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b) dz \right] dA = \\
&= \frac{1}{2} \iint_A \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \int_{z_l}^{z_{l+1}} (\boldsymbol{\varepsilon}'_m)^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}'_m dz \right] dA + \frac{1}{2} \iint_A \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \int_{z_l}^{z_{l+1}} z (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b)^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}'_m dz \right] dA + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_A \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \int_{z_l}^{z_{l+1}} z (\boldsymbol{\varepsilon}'_m)^T \mathbf{D}_l \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b dz \right] dA + \frac{1}{2} \iint_A \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \int_{z_l}^{z_{l+1}} z^2 (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b)^T \mathbf{D}_l \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b dz \right] dA
\end{aligned} \quad (5.11)$$

Realizando los integrales en el espesor vía una cuadratura numérica con un punto de integración por capa, se obtiene:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \iint_A \left[ \sum_{l=1}^{N_L} h_l (\boldsymbol{\varepsilon}'_m)^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}'_m \right] dA + \frac{1}{2} \iint_A \left[ \sum_{l=1}^{N_L} h_l \bar{z}_l (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b)^T \mathbf{D}_l \boldsymbol{\varepsilon}'_m \right] dA + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_A \left[ \sum_{l=1}^{N_L} h_l \bar{z}_l (\boldsymbol{\varepsilon}'_m)^T \mathbf{D}_l \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b \right] dA + \frac{1}{2} \iint_A \left[ \sum_{l=1}^{N_L} h_l (\bar{z}_l)^2 (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b)^T \mathbf{D}_l \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_b \right] dA
\end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $h_l = \frac{z_{l+1}-z_l}{2}$ ,  $\bar{z}_l = \frac{z_{l+1}+z_l}{2}$  es el punto medio de la capa “ $l$ ” y  $\mathbf{D}_l$  está asociada a tal punto. Nótese que si la secuencia de apilado es simétrico respecto del plano medio, el segundo y tercer término que aparece en (5.12) desaparecen y los comportamientos de membrana y de flexión resultan desacoplados nuevamente.

Los fórmulas operativas para la implementación de la matriz de rigidez elemental de la extensión ESL del elemento DKT-CST homogéneo, (ver su formulación en el Apéndice), se obtienen de la expresión (5.12), utilizando las matrices  $\mathbf{B}_m^{(e)}$  y  $\mathbf{B}_b^{(e)}$  de dimensión  $3 \times 18$  que relacionan respectivamente las deformaciones generalizadas de membrana y flexión con los parámetros (desplazamientos y giros nodales) del elemento lámina triangular. Para la integral en el área se emplea cuadratura numérica donde  $W_g$  es el peso de cada uno de los  $n_g$  puntos de integración. El resultado final es:

$$\mathbf{K}_{LAM}^{(e)} = \sum_{g=1}^{n_g} \sum_{l=1}^{N_L} \left[ \begin{aligned} &h_l \left( \mathbf{B}_m^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \right)^T \mathbf{D}_l(\boldsymbol{\xi}_g) \mathbf{B}_m^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \\ &+ h_l \bar{z}_l \left( \mathbf{B}_b^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \right)^T \mathbf{D}_l(\boldsymbol{\xi}_g) \mathbf{B}_m^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \\ &+ h_l \bar{z}_l \left( \mathbf{B}_m^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \right)^T \mathbf{D}_l(\boldsymbol{\xi}_g) \mathbf{B}_b^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \\ &+ h_l (\bar{z}_l)^2 \left( \mathbf{B}_b^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \right)^T \mathbf{D}_l(\boldsymbol{\xi}_g) \mathbf{B}_b^{(e)}(\boldsymbol{\xi}_g) \end{aligned} \right] W_g. \quad (5.13)$$

Consideraciones análogas conducen a la fórmula operativa para el cálculo del vector de fuerzas nodales:

$$\mathbf{F}_{LAM}^{(e)} = \sum_{g=1}^{n_g} \sum_{l=1}^{N_L} \left[ h_l \left( \mathbf{B}_m^{(e)} \left( \xi_g \right) \right)^T + h_l \bar{z}_l \left( \mathbf{B}_b^{(e)} \left( \xi_g \right) \right)^T \right] \begin{Bmatrix} \sigma_{x'} \left( \xi_g, \bar{z}_l \right) \\ \sigma_{y'} \left( \xi_g, \bar{z}_l \right) \\ \tau_{x'y'} \left( \xi_g, \bar{z}_l \right) \end{Bmatrix} W_g. \quad (5.14)$$

## Referencias

- [1] Bathe KJ. (1996). *"Finite Element Procedures"*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [2] Coleman BD, Gurtin M. (1967). "Thermodynamics with internal variables". *Journal of Chemistry & Physics*, 47:597-613.
- [3] Truesdell C, Noll W. (1965). "The non-linear field theories of mechanics". *Handbuch der Physik* 111/3, Berlin: ed, S. Flugge. Springer-Verlag.
- [4] Simo JC, Hughes TJR. (1998). *"Computational Inelasticity"*. New York: Springer-Verlag.
- [5] Crank J, Nicolson P. (1996). "A practical method for the numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type". *Advances in Computational Mathematics*, 6(1):207-226. [Reprinted from: *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (1947) 43:50-67.]
- [6] Oñate E. (1995). *"Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. Análisis estático lineal"* - 2ª ed. Barcelona: CIMNE.
- [7] Growth Project COMPASS (G5RD-CT-2001-00575): A Methodology for Durability Assessment of Composite Materials and Structures under Cyclic Loads.
- [8] GiD The personal pre & post processor. <http://gid.cimne.upc.es> [web home].
- [9] Cervera M.; Agelet C.; Chiumenti M. (2002). COMET: Coupled Mechanical and Thermal Analysis. Data input manual. *Technical Report CIMNE N° IT-308*. Barcelona.
- [10] Pagano NJ, Hatfield SJ. (1972). "Elastic behavior of multilayered bidirectional composites". *AIAA Journal*, 10:931-933.
- [11] Srinivas S, Rao AK. (1970). "Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates". *International Journal of Solids & Structures*, 6:1463-1481.
- [12] Noor AK. (1973). "Free vibrations of multilayered composite plates". *AIAA Journal*, 11:1038-1039.



- [13] Savoia M, Reddy JN. (1992). "A variational approach to three-dimensional elasticity solutions of laminated composite plates". *ASME Transactions, Journal of Applied Mechanics*, 59(2):S166-S175.
- [14] Varadan TK, Bhaskar K. (1991). "Bending of laminated orthotropic cylindrical shells - An elasticity approach". *Composite Structures*, 17(2):141-156.
- [15] Ren JG. (1987). "Exact solutions for laminated cylindrical shells in cylindrical bending". *Composites Science & Technology*, 29:169-187.
- [16] Whitney JM. (1969). "The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates". *Journal of Composite Materials*, 3:534-547.
- [17] Swift GW, Heller RA. (1974). "Layered beam analysis". *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 100(2):267-282.
- [18] Seide P. (1980). "An improved approximate theory for the bending of laminated plates". *Mechanics Today*. 5:451-466.
- [19] Chaudhuri RA, Seide P. (1987). "Triangular finite element for analysis of thick laminated plates". *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1203-1224.
- [20] Reddy JN. (1987). "A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates". *Communications in Applied Numerical Methods*, 3:173-180.
- [21] Barbero EJ, Reddy JN, Teply JL. (1990). "General two-dimensional theory of laminated cylindrical shells". *AIAA Journal*, 28(3):544-553.
- [22] Owen DRJ, Li ZH. (1987). "A refined analysis of laminated plates by finite element displacement methods - I. Fundamentals and static analysis". *Computers & Structures*, 26(6):907-914.
- [23] Carrera E. (2003). "Theories and finite elements for multilayered plates and shells: A unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking". *Archives of Computational Methods in Engineering* 10:215-296.
- [24] Rastellini F, Serpieri R. (2004). "Implementación del elemento lámina lineal y triangular tipo DKT-CST en el código FEM COMET". *Informe Técnico CIMNE IT-434*. Barcelona: CIMNE.

- [25] Oñate E. (2002). "Cálculo de estructuras con materiales compuestos por el método de elementos finitos". En: *"Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos"*. Sergio Oller (Ed.). Barcelona: CIMNE. pp. 219-256.



## 6 VALIDACIÓN Y CALIBRACIÓN

El objetivo de este capítulo es mostrar y discutir los resultados de los distintos análisis numéricos que se han realizado para validar la respuesta del modelo propuesto en sus dos versiones (BSP y ESP), tanto en el aspecto de precisión como en el de rendimiento computacional.

Como el modelo propuesto está basado en la gestión adecuada de los modelos constitutivos de los materiales componentes, es necesario adoptar las leyes constitutivas específicas que mejor representan el comportamiento mecánico de cada fase componente, en cada estudio realizado. Cuando se estudie la respuesta general del modelo, se emplearán materiales ficticios con el fin de poder apreciar mejor la interacción entre las fases componentes y además mostrar la capacidad del modelo propuesto para “componer” comportamientos constitutivos diversos. Se emplearán tanto modelos de daño como de plasticidad, con endurecimiento y ablandamiento lineal. Por otro lado, cuando el objetivo sea reproducir de la forma más precisa posible la respuesta mecánica de materiales compuestos verdaderos, se utilizarán modelos de daño no iso-resistente para la fibra y la matriz, indicándose el proceso de calibración.

Las pruebas realizadas se pueden dividir en dos grupos: a) pruebas para la validación general del modelo realizadas sobre una lámina unidireccional, y b) pruebas para analizar la capacidad de predicción del modelo, comparándola con datos experimentales. Entre las validaciones del primer grupo, hay simulaciones numéricas desarrolladas para verificar el cumplimiento de la ecuación de cierre, el

comportamiento general del modelo, la respuesta dada en términos de rigidez y resistencia, y el rendimiento computacional. Las validaciones del segundo grupo consisten en obtener y comparar varias envolventes de fallo de lámina y laminados considerados en el “ejercicio de fallo”.

El “ejercicio de fallo” (WWFE, *World-Wide Failure Exercise*) [1] fue propuesto en 1998 a la comunidad científica con el objetivo de contrastar las diferentes predicciones de fallo existente en la literatura. A través del mismo, cada autor (o grupo investigador) emplea sus propias teorías de fallo para predecir las envolventes de fallo de láminas uni- y multi-direccionales. Los datos proporcionados a los participantes son las propiedades mecánicas tanto de lámina como de componentes. Con ellos, cada autor realiza su predicción a ciegas, es decir sin conocer las envolventes de fallo obtenidas experimentalmente, y luego, una vez conocidas éstas, se les da una segunda oportunidad para mejorar su predicción inicial. Este “ejercicio” y todos los artículos derivados del mismo constituyen una revisión importante en el tema; y tendría que ser tomado como punto de referencia para validar cualquier nueva teoría de fallo o modelo constitutivo. Entre las predicciones más acertadas se encuentran las realizadas por Puck, razón por la cual será escogido, en el presente trabajo, como un patrón de comparación junto con los resultados experimentales.

Como la respuesta del laminado compuesto se verifica localmente en cada punto material, las validaciones se realizan en un solo elemento finito hexaédrico isoparamétrico. En cada lámina del laminado se empleará el modelo propuesto en su versión básica BSP o enriquecida ESP según sea el caso de estudio. El término “elemento compuesto” se usará para referirse a este elemento finito en el cual el modelo de compuesto propuesto se usa junto con una teoría de laminado para modelar la respuesta constitutiva en cada punto de integración.

## **6.1 Verificación del cumplimiento de las ecuaciones de cierre**

En esta sección, se verifica el cumplimiento de la ecuación de cierre como parte del proceso de validación. Con este objetivo en mente, los estados de tensión y deformación se analizan no solo en las fases componentes si no también en el material compuesto. La lámina unidireccional bajo estudio será sometida a dos escenarios de carga, llamados “carga paralela” y “carga transversal”, donde las cargas aplicadas serán paralelas o perpendiculares a la dirección de la fibra respectivamente.

Vale la pena hacer constar que el modelo constitutivo cumple en todo momento las ecuaciones de cierre independientemente del tipo de carga aplicada. Estos casos de carga particulares, fueron elegidos como ejemplos de validación; pero

lógicamente, el material compuesto podría también ser sometido a estados de carga multiaxiales.

En las siguientes pruebas numéricas, las propiedades mecánicas de la matriz y de las fibras se han elegido para que muestren las principales peculiaridades del modelo de forma clara. Éstas no corresponden a materiales reales, por eso se los ha llamado materiales 'M' y 'F', respectivamente.

### 6.1.1 Carga paralela

Para probar el modelo constitutivo propuesto bajo una carga paralela, se ha aplicado una deformación longitudinal controlada, en un proceso de carga y descarga, a un “elemento compuesto” hexaédrico. No se ha considerado ninguna otra restricción.

Las propiedades mecánicas de los materiales componentes se muestran en la siguiente tabla:

	Material 'M'	Material 'F'
Ley Constitutiva	Plasticidad perfecta J2	Plasticidad perfecta J2
Módulo de Young [MPa]	40000	80000
Tensión límite [MPa]	1000	3480
Coeficiente de Poisson	0.0	0.0
Fracción volumétrica	0.58	0.42

Tabla 6.1 – Propiedades mecánicas de los constituyentes utilizados para validar el modelo compuesto sometido a una carga paralela.

La Figura 6.1 muestra la respuesta obtenida para la tensión paralela  $\sigma_P$  en función de la deformación paralela  $\varepsilon_P$ . Debido a la ecuación de compatibilidad, la deformación paralela es igual a lo largo de todo el proceso, tanto en la fibra y la matriz como en el compuesto (iso-deformación en la dirección paralela). En la primera rama elástica, el compuesto presenta una rigidez coincidente con la dada por la regla de mezclas (ROM, *rule of mixtures*). La rigidez del compuesto se ve reducida en el momento en que plastifica la matriz. La plasticidad perfecta del compuesto se alcanza en el momento en que las fibras alcanzan su límite elástico. La carga es invertida al alcanzar una deformación del 10%. Durante el proceso de descarga, todos los materiales presentan una rigidez elástica no dañada. Al completar la descarga, no sólo se observan deformaciones inelásticas sino que también se aprecian unas tensiones remanentes en los componentes debido a la plasticidad. Estas tensiones residuales están autoequilibradas en el volumen, resultando nula la tensión final en el compuesto.

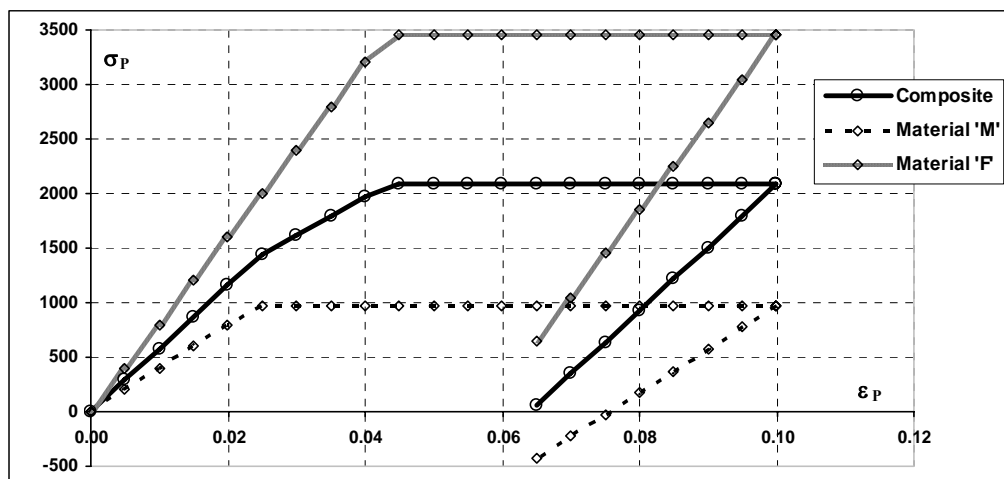


Figura 6.1 – Curvas de tensiones paralelas [MPa] vs. deformaciones paralelas para el compuesto y los materiales componentes, bajo un proceso a deformación controlada de carga-descarga en la dirección paralela.

### 6.1.2 Carga transversal

Para validar el comportamiento en serie del modelo, un elemento compuesto hexaédrico es sometido a una carga transversal pura. El ensayo se ha realizado aplicando una deformación transversal controlada, con un proceso de carga y descarga, alcanzando deformaciones del 5%. No se ha aplicado ninguna otra restricción. La ley constitutiva elegida para el material 'F' corresponde a un modelo de daño isótropo con ablandamiento. Para el material 'M' se ha considerado un modelo de plasticidad J2 con endurecimiento exponencial. Las principales propiedades mecánicas de cada uno de los materiales se exponen en la siguiente tabla:

	Material 'F'	Material 'M'
Ley constitutiva	Daño isótropo con ablandamiento	Plasticidad J2 con endurecimiento
Módulo de Young [MPa]	3000	2000
Tensión límite [MPa]	60	40
Coefficiente de Poisson	0.0	0.0
Fracción volumétrica	0.5	0.5

Tabla 6.2 – Propiedades mecánicas de los constituyentes seleccionados para verificar el modelo SP bajo carga transversal (comportamiento en serie).

Nótese que los coeficientes de Poisson se han definido nulos para evitar el “acoplamiento” con el comportamiento longitudinal, que no es deseable en este punto del proceso de validación. Se verá más adelante que el modelo puede trabajar lógicamente también con diferentes módulos de Poisson.

Nótese además que el material 'M' tiene menor rigidez y tensión límite que el 'F'.

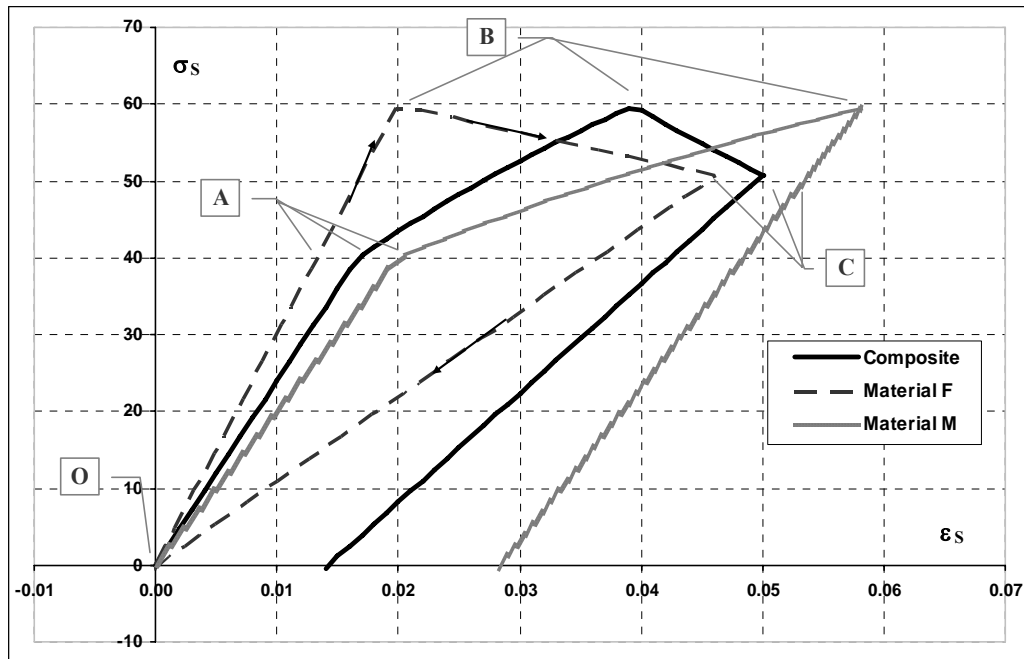


Figura 6.2 – Curvas de tensión serie [MPa] vs. deformación serie para el material compuesto y sus constituyentes, sometidos a carga-descarga con deformación transversal controlada.

En la Figura 6.2 se han representado las tensiones transversales  $\sigma_s$ , que se observan en cada uno de los materiales durante el proceso de validación, en función de sus respectivas deformaciones transversales  $\epsilon_s$ . La simulación muestra que en cada paso del análisis la ecuación de cierre se cumple perfectamente; esto es observable en el hecho de que en cada paso las tensiones son idénticas para cada uno de los materiales (iso-tensión en direcciones transversales).

En la rama elástica (O-A), la rigidez transversal del compuesto que proporciona el modelo SP se corresponde con la ROM inversa.

Cuando el material 'M' alcanza su superficie de fluencia –punto (A) en el material compuesto– el material experimenta deformaciones plásticas, pero sigue incrementando su tensión debido a la ley de endurecimiento. Este hecho produce una reducción de la rigidez del compuesto a lo largo de la rama (A-B), en la cual el material 'F' se mantiene elástico hasta llegar al punto (B), momento en que empieza su daño.

El daño en el material 'F' evoluciona a lo largo de la rama (B-C) lo que provoca la disminución de todas las tensiones. Debido a esto, el material 'M' experimenta una descarga elástica.

A partir del punto (C), el signo de la deformación aplicada se invierte (proceso de descarga). Luego, todos los materiales experimentan una descarga elástica. La descarga en el material 'F' se produce con una rigidez reducida debido a que éste



está dañado. El material 'M' se descarga con su rigidez inicial y, al descargar totalmente el material, presenta una deformación plástica residual.

### 6.1.3 Observación

El cumplimiento de las ecuaciones de cierre se verifica no sólo en la región lineal elástica sino también cuando el material presenta un comportamiento no-lineal, incluyendo procesos de ablandamiento para cualquier estado de cargas aplicado.

## 6.2 Validaciones de rigidez

La rigidez de los materiales compuestos que proporciona el modelo numérico se estudia para cualquier carga no-axial aplicada. También se analiza la influencia del volumen de fibras sobre la rigidez longitudinal, transversal y sobre la rigidez a cortante en el plano.

### 6.2.1 Rigidez vs. orientación de fibra

En esta validación un elemento compuesto hexaédrico, constituido por dos materiales elásticos isótropos, es sometido a una tensión uniaxial (carga a fuerza controlada) aplicada en distintas direcciones, rotada un ángulo  $\theta$  respecto la dirección de las fibras.

Las propiedades mecánicas de los materiales utilizados se muestran en la siguiente tabla:

	Fibra	Matriz
Material	vidrio	epoxi
Módulo de Young [MPa]	105950	5000
Coeficiente de Poisson	0.22	0.38
Fracción volumétrica	0.6	0.4

Tabla 6.3 – Propiedades mecánicas de los constituyentes definidos para validar la rigidez.

El modelo SP proporciona a siguiente matriz de rigidez en la dirección local de las fibras  $C_{\theta=0}$  a partir de la cual se puede evaluar la matriz de flexibilidad "D".

$$C_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 71827 & 12452 & 12452 & 0 & 0 & 0 \\ 12452 & 31461 & 18102 & 0 & 0 & 0 \\ 12452 & 18102 & 31461 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6679 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6679 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6679 \end{pmatrix} \cdot \text{MPa} \Rightarrow D = (C_{\theta=0})^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} 15.251 & -3.832 & -3.832 & 0 & 0 & 0 \\ -3.832 & 48.480 & -26.378 & 0 & 0 & 0 \\ -3.832 & -26.378 & 48.480 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 149.714 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 149.714 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 149.714 \end{pmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Como se muestra en la Figura 6.3, la curva que se obtiene al representar la rigidez resultante vs. el ángulo  $\theta$  coincide exactamente con la curva dada por la fórmula para el cambio de coordenadas de los coeficientes de la matriz de flexibilidad (ver fórmula “S<sub>11</sub>” en la página 98 de Reddy [2]):

$$\frac{1}{E_\theta} = D_{11} \cos^4 \theta - 2D_{16} \cos^3 \theta \sin \theta + (2D_{12} + D_{66}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2D_{26} \cos \theta \sin^3 \theta + D_{22} \sin^4 \theta,$$

donde  $D_{ij}$  indica los coeficientes de la matriz de flexibilidad para  $\theta=0$ .

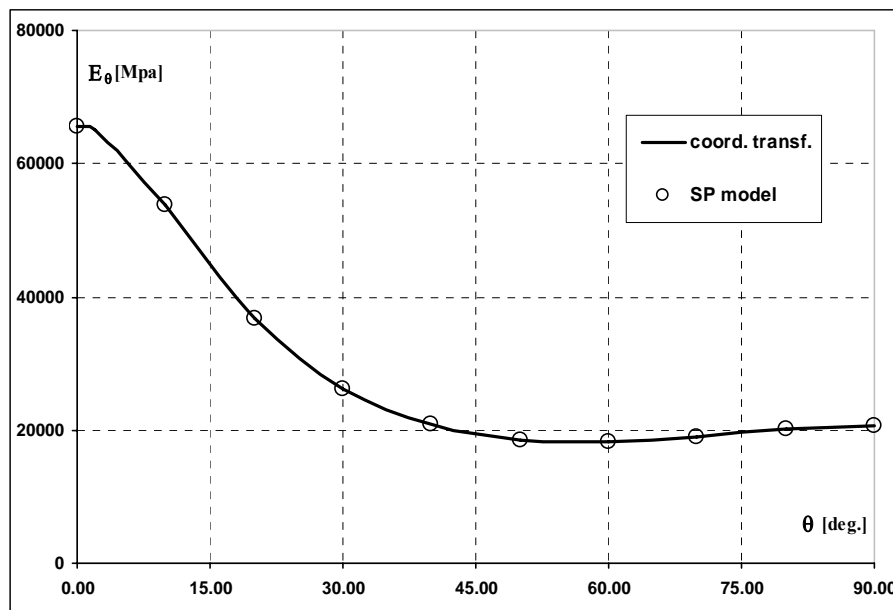


Figura 6.3 – Curva de rigidez [MPa] vs. orientación de fibra para el compuesto.

## 6.2.2 Rigidez longitudinal vs. fracción volumétrica de fibras

Los materiales componentes de la validación previa se toman para estudiar la influencia de la fracción volumétrica de fibras en la rigidez longitudinal de compuestos con fibras largas (LFC, *long fibre composites*).

La rigidez longitudinal  $E_1$  se obtiene con el modelo BSP y ESP, para diferentes valores de la fracción volumétrica de fibras  $V_f$ . Como era de esperar, el modelo reproduce exactamente la predicción ROM en dirección paralela, presentando una variación lineal en términos de  $V_f$  entre los 5000 MPa (para  $V_f = 0$ ) y los 105950

MPa (para  $V_f = 1$ ), valores que corresponden a los módulos de Young de la matriz y la fibra, respectivamente.

### 6.2.3 Rigidez transversal vs. fracción volumétrica de fibras

En esta validación se compara la capacidad de predicción de los modelos BSP y ESP, para obtener la rigidez transversal de un laminado de vidrio-epoxi con  $E_F/E_M=21.19$ ,  $\nu_F=0.22$ ,  $\nu_M=0.38$  (relación entre rigideces y coeficientes de Poisson de los materiales de la Tabla 6.3), con resultados experimentales y con la aproximación dada por las fórmulas semi-empíricas que se utilizan frecuentemente. La validación consiste en someter a un elemento compuesto hexaédrico a una carga puramente transversal, variando la fracción volumétrica de fibras  $V_f$  en el mismo.

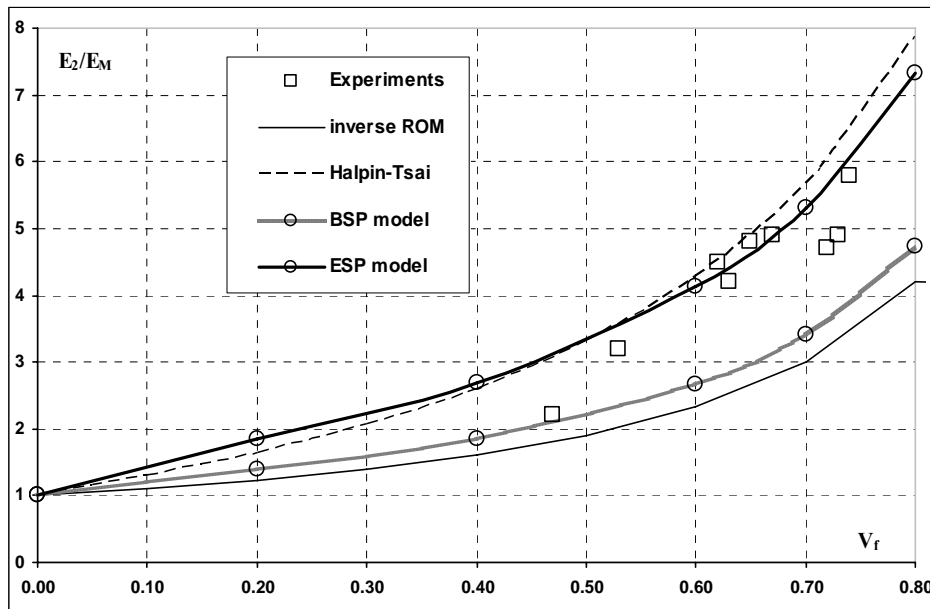


Figura 6.4 – Rigidez transversal relativa  $E_2/E_M$  vs. fracción volumétrica de fibras  $V_f$ . Comparación entre los resultados obtenidos con los modelos propuestos, datos experimentales, ROM inversa y ecuación de Halpin-Tsai.

En la Figura 6.4 se presentan las curvas adimensionales  $E_f/E_m$  vs.  $V_f$  obtenidas de las simulaciones realizadas con los modelos BSP y ESP. Se han representado también valores experimentales obtenidos de Barbero [3] (pág. 72). En la misma figura se muestran también, como comparación, las curvas resultantes de la ROM inversa y de la ecuación de Halpin-Tsai [4]:

$$\frac{E_2}{E_M} = \frac{1 + \xi \eta V_F}{1 - \eta V_F} \quad \text{con} \quad \eta = \frac{\left(\frac{E_F}{E_M}\right) - 1}{\left(\frac{E_F}{E_M}\right) + \xi},$$

el coeficiente  $\xi$  se adopta igual a 2, valor sugerido para fibras circulares en un arreglo cuadrado –ver Jones [5] (pag. 115) y Barbero [3] (pág.72)–.

La rigidez transversal obtenida con el modelo BSP es ligeramente superior a la que proporciona la ROM inversa debido a efectos de Poisson y a la restricción longitudinal ofrecida por las fibras. Coincide exactamente con la fórmula siguiente, que se deriva al considerar la ROM inversa junto con las ecuaciones de cierre del modelo BSP.

$$E_2 = \frac{1}{\left(\frac{V_F}{E_F} + \frac{V_M}{E_M}\right)} \left( \frac{1}{1 - \rho_v} \right) \quad \text{con} \quad \rho_v = \nu_M^2 \nu_F^2 V_M V_F \frac{\left( \frac{E_M}{\nu_M} - \frac{E_F}{\nu_F} \right)^2}{E'_s E_p}, \quad \text{donde:}$$

$E_2$	Rigidez transversal del compuesto con restricción longitudinal de fibras
$E_F, E_M$	Módulo de Young de las fibras y la matriz.
$\nu_F, \nu_M$	Coefficiente de Poisson de las fibras y la matriz.
$V_F, V_M$	Fracciones volumétricas de las fibras y la matriz.
$E'_s$	Rigidez en serie (transversal) considerando la ROM inversa.
$E_p$	Rigidez en paralelo (longitudinal) considerando la ROM directa.

Lógicamente, cuando se consideran módulos de Poisson igual a cero se recupera la curva dada por la ROM inversa.

El gráfico muestra que tanto el modelo BSP como la ROM inversa subestiman apreciablemente los resultados experimentales. Por otro lado, el modelo ESP, enriquecido con el parámetro gamma, proporciona una aproximación a los datos experimentales tan buena como la obtenida con la ecuación de Halpin-Tsai, que es la formulación más utilizada cuando se tiene una información experimental limitada. Es importante hacer constar que en modelo ESP no se introdujo ningún coeficiente de ajuste experimental, puesto que el modelo se basa únicamente en consideraciones micro-mecánicas.

Todas las validaciones previas que, por simplificación, se han ilustrado sólo para el modelo SP básico, son cumplidas íntegramente por el modelo ESP.

#### 6.2.4 Rigidez a cortante en el plano vs. fracción volumétrica de fibras

En esta validación se compara la capacidad de predicción de los modelos BSP y ESP, para obtener la rigidez a cortante en el plano, con datos experimentales y con la aproximación dada por la ecuación de Halpin-Tsai. Para hacer la validación se utilizará un laminado de vidrio-epoxi con  $G_F/G_M=20.0$ .

La Tabla 6.4 muestra las propiedades mecánicas de los materiales componentes:

	Fibra	Matriz
Material	E-glass	Epoxi
Módulo de Young [MPa]	72300	4000
Coeficiente de Poisson	0.22	0.35
Módulo a cortante [MPa]	29631	1481

Tabla 6.4 – Propiedades mecánicas de fibra y matriz para validar la rigidez a cortante en el plano.

La validación consiste en someter a un elemento compuesto hexaédrico a una carga de cortante en el plano, considerando distintas fracciones volumétricas de fibras.

En la Figura 6.5 se grafican las curvas adimensionales  $G_F/G_M$  en función de la fracción volumétrica de fibras  $V_F$ , obtenidas de las simulaciones resultantes de los modelos BSP y ESP. Para comparación, se muestran también los datos experimentales proporcionados por Barbero [3] (pág. 75) junto con las curvas resultantes de la ROM inversa y con las obtenidas de la ecuación de Halpin-Tsai. En este caso el valor considerado para el coeficiente  $\xi$  es 1, tal como se sugiere en Halpin-Tsai [4].

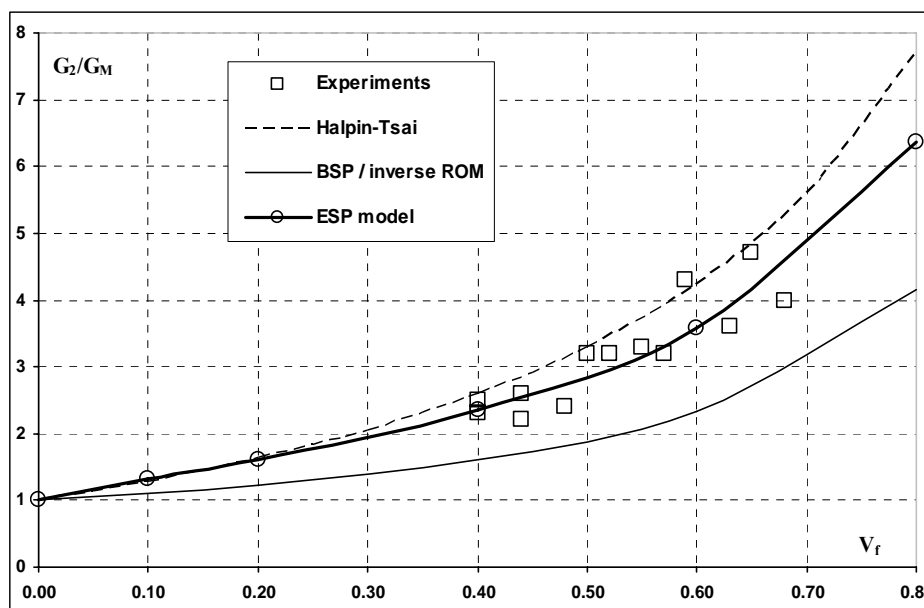


Figura 6.5 – Rigidez tangencial relativa  $G_{12}/G_M$  versus fracción volumétrica de fibras  $V_f$ . Comparación entre resultados experimentales, modelo ROM inverso, ecuación de Halpin-Tsai y resultados obtenidos con los modelos BSP y ESP.

Dado que para el cortante no hay acoplamiento (i.e. la constricción longitudinal de las fibras no afecta al cortante), la rigidez transversal que presenta el modelo BSP coincide con la que se obtiene de la ROM inversa. En ambos casos, el gráfico muestra que esta es una predicción inexacta del módulo de cortante en el plano.

El modelo ESP proporciona una mejor aproximación a los datos experimentales, siendo tan buena como la obtenida con la ecuación de Halpin-Tsai.

Es importante hacer constar que el parámetro  $\gamma$ , adoptado para el comportamiento a cortante en el modelo ESP, tiene el mismo valor que el obtenido con las consideraciones micro-mecánicas de rigidez transversal.

La ecuación de Halpin-Tsai puede generar una familia de curvas en función del coeficiente  $\xi$  elegido, permitiendo escoger la curva que mejor ajusta los resultados experimentales. Al utilizar la ecuación de Halpin-Tsai para evaluar la rigidez a cortante, es usual adoptar coeficientes  $\xi$  menores que los empleados para la rigidez transversal, dado que proporcionan curvas menos rígidas. Por esta razón, podría haberse esperado que también se requiriera un valor del parámetro  $\gamma$  inferior en el caso de cortante, pero no ha sido el caso.

Se entiende que la menor rigidez proporcionada por el modelo ESP de manera natural es debido a que las fibras no producen ninguna restricción en el caso de cortante. Esto explicaría el porqué en el modelo ESP un mismo valor de  $\gamma$  proporciona resultados acordes con los datos experimentales tanto para la rigidez transversal como para la rigidez a cortante.

## 6.3 Validaciones de resistencia

Se analizará la influencia de la fracción volumétrica de fibras sobre la resistencia longitudinal, transversal y a cortante del compuesto. También se estudiará la resistencia a tracción proporcionada por el modelo numérico para cargas no coincidentes con la dirección de las fibras (*off-axis loading*).

### 6.3.1 Resistencia longitudinal a tracción vs. fracción volumétrica de fibras

Esta validación analiza la resistencia longitudinal a tracción resultante del modelo serie-paralelo enriquecido (ESP) en función de la fracción volumétrica de fibras.

Se examinarán tanto los compuestos de vidrio-epoxi (GRP, *glass reinforced polymers*), como los de carbono-epoxi (CFRP, *carbon fibre reinforced polymers*), debido a que en los compuestos GRP las fibras de vidrio tienen una resistencia límite mayor que la matriz epoxi, mientras que en los laminados CFRP es al revés presentando las fibras una resistencia límite menor.

Las propiedades de los materiales componentes se han obtenido de la literatura. Tanto la matriz como las fibras se modelan con un modelo de plasticidad J2, es

decir, se considera que la superficie de fallo es la de Von-Mises en ambos materiales.

Los parámetros adoptados para los laminados se muestran en las siguientes tablas:

		$E_1$ [MPa]	$\nu$	$G$ [MPa]	$X_T$ [MPa]	$\varepsilon_{1T}$
Fibra	E-Glass	72345.0	0.220	29650.6	3450.0	0.048
Matriz	Epoxi 9310/9360@23	3120.0	0.380	1130.4	75.80	0.024

Tabla 6.5 – Propiedades mecánicas de los constituyentes de GRP.

		$E_1$ [MPa]	$\nu$	$G$ [MPa]	$X_T$ [MPa]	$\varepsilon_{1T}$
Fibra	Fibras Carbono CBX 400	250000.0	0.200	104166.7	3950.0	0.016
Matriz	Epoxi Vantico	3200.0	0.350	1185.2	77.0	0.024

Tabla 6.6 – Propiedades mecánicas de los constituyentes de CFRP.

Se aplica una carga paralela a las fibras hasta rotura para ambos tipos de material compuesto, considerándose distintas fracciones volumétricas de fibra.

La resistencia última resultante, en términos de la fracción volumétrica, se muestra en la Figura 6.6 para los laminados GRP y en la Figura 6.7 para los laminados CFRP. Como muestran los gráficos, en ambos casos la función obtenida es muy cercana a una combinación lineal de las resistencias últimas de fibra y matriz, tal cual lo esperado –ver, por ejemplo, Barbero [3] pág. 86, 17 y 23–.

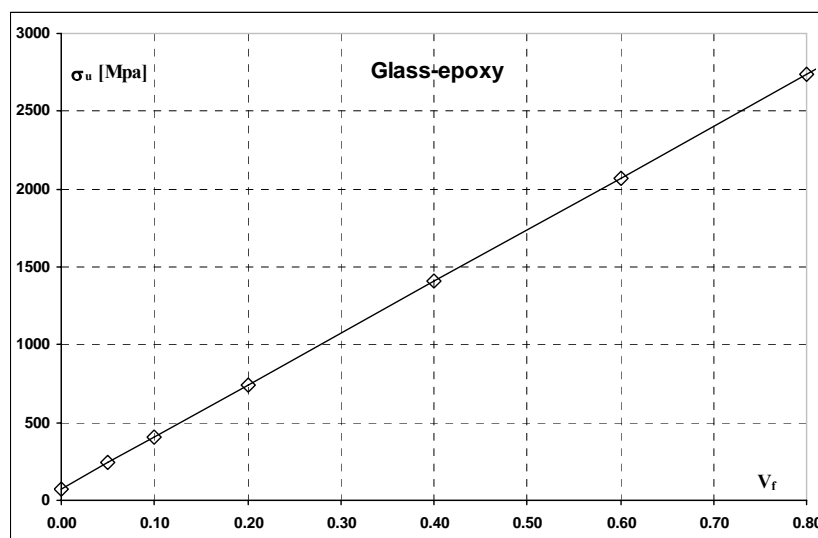


Figura 6.6 – Tensión última [MPa] en función de la fracción volumétrica de fibras para una lámina de vidrio-epoxi unidireccional sometida a una carga paralela.

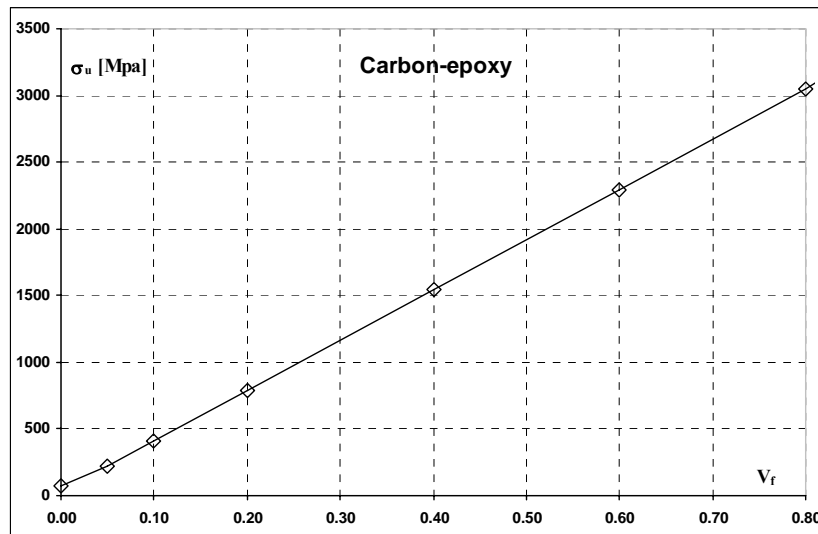


Figura 6.7 – Tensión última [MPa] en función de la fracción volumétrica de fibras para una lámina de carbono-epoxi unidireccional, sometida a una carga paralela.

### 6.3.2 Resistencia transversal vs. fracción volumétrica de fibras

Esta validación analiza la resistencia a tracción transversal que proporciona el modelo ESP, en función de la fracción volumétrica de fibra. Los materiales constituyentes (matriz y fibras) en este ensayo son los considerados en las láminas de carbono-epoxi de la prueba anterior –Tabla 6.6–. El material compuesto se somete a una deformación transversal controlada hasta rotura.

El comportamiento del modelo de material compuesto bajo una carga transversal es semejante al de una serie de muelles (comportamiento en serie perfecto) pero a la vez restringido en la dirección longitudinal (paralela a las fibras). Esta restricción interna (deformación paralela igual para fibra y matriz) hace que la respuesta transversal sea más rígida a la que se obtendría con un comportamiento en serie perfecto.

Al ser las fibras bastante más rígidas que la matriz, éstas están sometidas a una deformación menor y se mantienen en su rango elástico, siendo la matriz (material más blando) la que toma la mayor parte de la deformación aplicada.

En la Figura 6.8, se muestra un diagrama de la resistencia última a tracción transversal del compuesto en función de la fracción volumétrica de fibras  $V_f$ . Al ser iso-resistente el modelo plástico J2, los valores absolutos para la resistencia a tracción y compresión son idénticos.



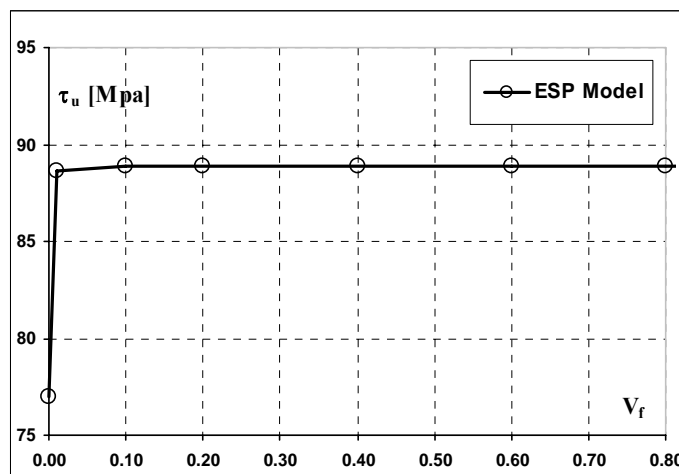


Figura 6.8 – Resistencia última del compuesto [MPa] en función de la fracción volumétrica de fibras en una lámina unidireccional de carbono-epoxi, sometida a una carga transversal.

La curva toma el valor de la resistencia tensional máxima de la matriz 77.0 MPa para un contenido en fibras del 0% (como era de esperar). Al aumentar el contenido en fibras, la resistencia pasa a ser de 88.9 MPa y se mantiene constante hasta contenidos elevados de fibra. Esta variación en la resistencia se puede atribuir a la contribución de las fibras, en sentido longitudinal, que modifica el estado tensional en la matriz favoreciendo, de este modo, un aumento en el valor de la resistencia última del compuesto.

### 6.3.3 Resistencia a cortante vs. fracción volumétrica de fibras

Esta validación analiza la resistencia a cortante obtenida con el modelo ESP en función de la fracción volumétrica de los constituyentes del compuesto. En este caso, de nuevo, los materiales adoptados para la fibra y para la matriz tienen las mismas propiedades que los usados en el laminado de carbono-epoxi incluidos en la Tabla 6.6.

El compuesto se somete a una deformación a cortante en el plano hasta el límite elástico a cortante del material de la matriz, instante en el que empieza la plastificación. Como el comportamiento del material compuesto se puede considerar en serie perfecto bajo una carga tangencial y al ser las fibras bastante más rígidas que la matriz, éstas se verán afectadas por una deformación tangencial muy pequeña y se mantendrán en rango elástico, mientras que la mayor parte de las deformaciones tangenciales serán absorbidas por la matriz.

La resistencia a cortante última del compuesto que se obtiene es independiente de la fracción volumétrica de fibras y resulta ser igual a  $\frac{\sigma_{mu}}{\sqrt{3}}$ , dado que se ha adoptado una superficie de fluencia de Von-Mises para la matriz.

A diferencia de la validación previa, en ésta no se aprecia un incremento de la resistencia a cortante última ya que no hay efecto de restricción en este caso.

#### 6.3.4 Resistencia última vs. orientación de fibras

En esta validación un elemento compuesto hexaédrico, constituido por los mismos materiales utilizados en las validaciones previas (lámina carbono-epoxi) y con una composición volumétrica de fibras de  $V_f = 0.60$ , es sometido a una tensión uniaxial, aplicando una fuerza controlada, en una dirección rotada un ángulo  $\theta$  respecto la orientación de las fibras. La resistencia última obtenida con el modelo propuesto, en función del ángulo  $\theta$  se muestra en la Figura 6.9.

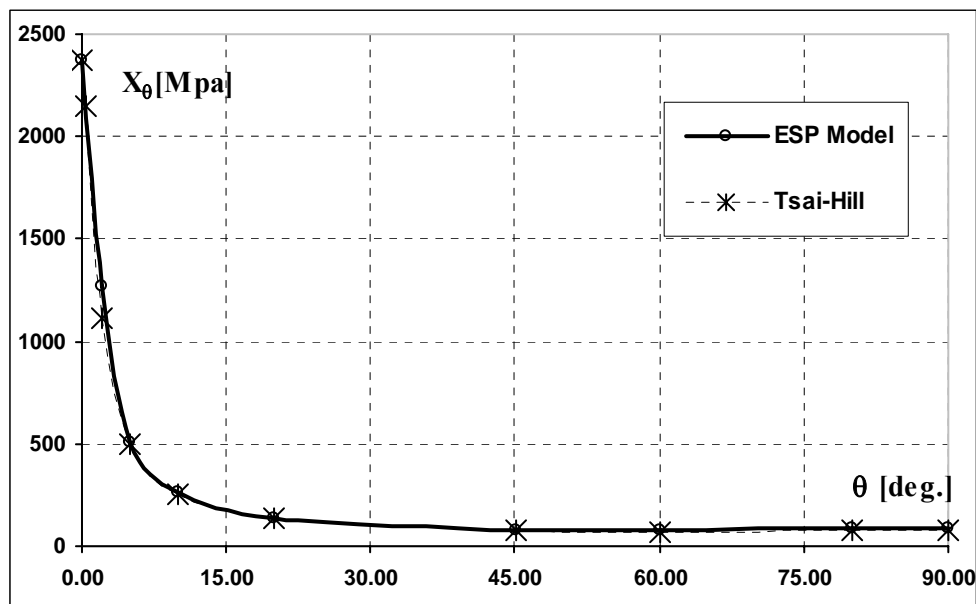


Figura 6.9 – Curva de resistencia última [MPa] para una lámina unidireccional de carbono-epoxi, sometida a una carga aplicada en diferentes ángulos respecto la orientación de fibras.

La curva obtenida con el modelo ESP es prácticamente coincidente con la que se obtiene al considerar el criterio de Tsai-Hill –ver Barbero [3]– que viene dada por:

$$X_{\theta TH} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^4 \theta}{X_1^2} + \frac{\sin^4 \theta}{X_2^2} - \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{X_1^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{X_2^2}}}$$

Únicamente para ángulos muy pequeños, la curva presenta un quiebre similar al criterio de máxima tensión. Esto es debido al hecho de que el modelo SP distingue naturalmente entre el fallo en la fibra y el fallo en la matriz.

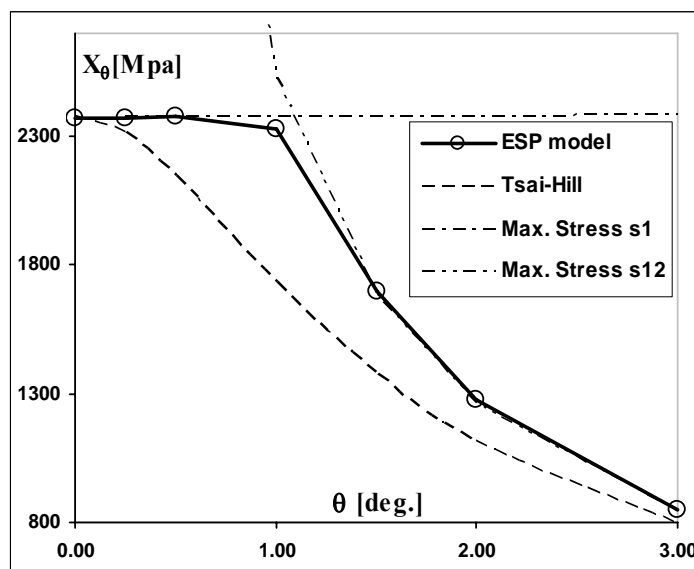


Figura 6.10 – Detalle de la resistencia última [MPa] de una lámina de carbono-epoxi, para ángulos *off-axis* pequeños. Comparación con fórmulas ampliamente utilizadas.

## 6.4 Convergencia local y global

El algoritmo propuesto para el modelo logra el equilibrio de las tensiones ‘en serie’ de los componentes mediante un proceso iterativo. El método de Newton-Raphson proporciona convergencia cuadrática para el problema local (interno). El presente modelo proporciona además la matriz tangente algorítmica para alcanzar la convergencia global del problema. En esta sección se verificará la velocidad de convergencia para ambos problemas.

El modelo propuesto debe presentar convergencia cuadrática cuando se proporcionan los tensores constitutivos tangentes para los modelos constitutivos de los materiales componentes.

### 6.4.1 Descripción del ensayo

El material compuesto se somete a un proceso de carga-descarga transversal. La simulación numérica usa pasos de carga grandes para poder, así, analizar la velocidad de convergencia del modelo propuesto.

Ambos materiales componentes se consideran elasto-plásticos; el material ‘F’ con ablandamiento y el material ‘M’ con endurecimiento. Los modelos de los componentes proporcionan el tensor constitutivo tangente que se utilizará en el algoritmo de solución del compuesto.

En la siguiente tabla se indican las propiedades de los materiales utilizados.

Propiedades mecánicas	Material 'F'	Material 'M'
Ley constitutiva	Plasticidad J2 con endurecimiento	Plasticidad J2 con ablandamiento
Fracción volumétrica	50 %	50 %
Módulo de Young [MPa]	3000	2000
Coefficiente de Poisson	0.35	0.2
Tensión inicio plastificación [MPa]	60	40
Tensión fin plastificación [MPa]	30	70
Exponente de endurecimiento	30	30

Tabla 6.7 – Propiedades de los materiales considerados en el análisis de convergencia.

### 6.4.2 Resultados

La figura siguiente muestra los gráficos tensión-deformación ‘en serie’ para el compuesto y para los materiales componentes, obtenidos durante el proceso de carga-descarga transversal.

El resultado es similar al discutido en el apartado 6.1.2, donde la carga transversal se aplicaba a un material compuesto cuyo material ‘F’ respondía a un modelo de daño –ver Figura 6.2 y su descripción –. En el presente caso, el material ‘F’ es también elasto-plástico y los coeficientes de Poisson no son nulos.

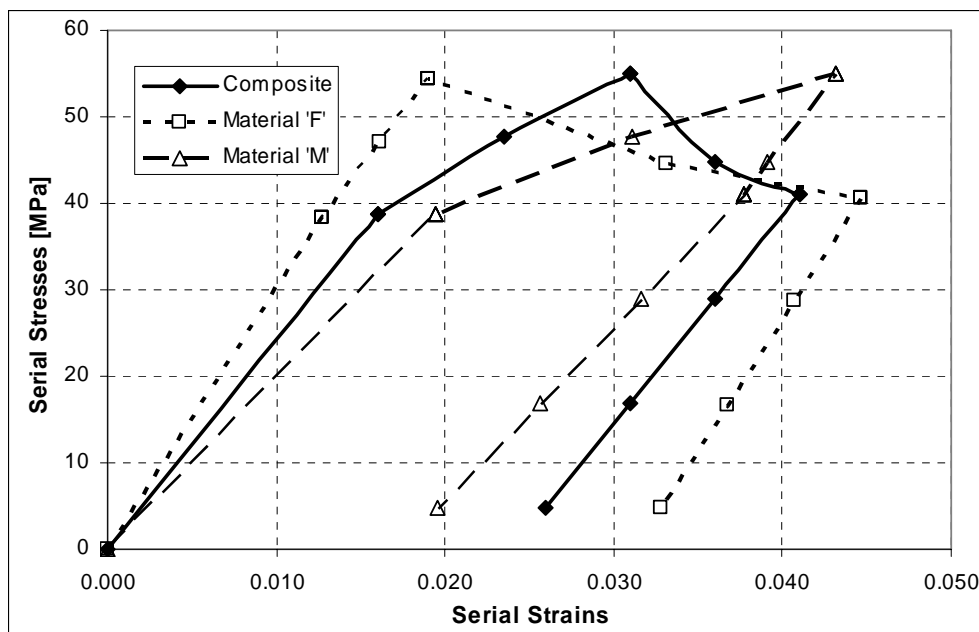


Figura 6.11 – Curvas tensión-deformación para el compuesto y sus componentes. Ensayo de carga y descarga transversal.

Debido a las diferencias en los módulos de Poisson de los materiales componentes, el proceso de carga también produce tensiones y deformaciones en la dirección paralela a las fibras, como se muestra en la

Figura 6.12. Nótese que la tensión paralela en el compuesto es cero, mientras que las tensiones en los componentes son opuestas; y que las deformaciones paralelas son iguales para todos los materiales durante todo el proceso como era de esperarse debido al cumplimiento de la ecuación de compatibilidad. Las tensiones paralelas en los materiales componentes son originadas por las diferencias en los coeficientes de Poisson (en la zona elástica) y también por los flujos plásticos de los materiales (en la zona plástica).

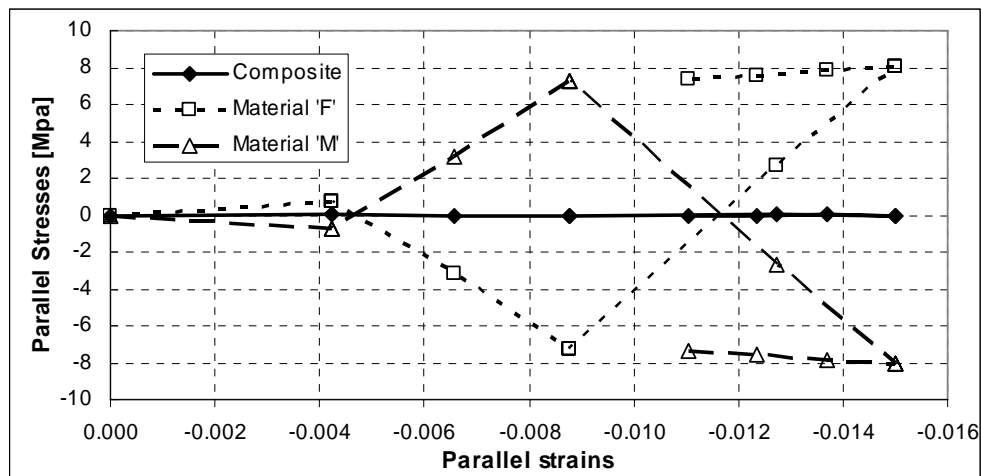


Figura 6.12 – Curvas tensión-deformación 'paralelas' para el compuesto y sus componentes bajo un estado de carga-descarga transversal.

La Tabla 6.8 proporciona el error relativo residual y el número de iteraciones necesarias, tanto para el problema local como para el problema global, para cada paso de carga del proceso de carga-descarga considerado en la simulación.

La Figura 6.13 muestra la convergencia global en los principales pasos no lineales (B, C, D y E) para el proceso de carga y descarga.

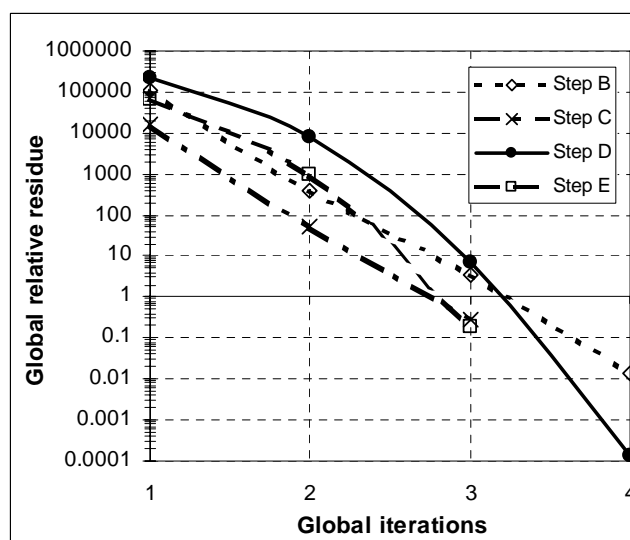


Figura 6.13 – Convergencia global para diferentes pasos de carga en el proceso de carga-descarga.

		CONVERGENCIA GLOBAL		CONVERGENCIA LOCAL	
PASO	DEFORMACIÓN	IITER	Residuo global relativo RATIO/TOLER	KITER	Residuo local relativo EUNOR/TOLRES
A	0.016	1	0	1	0
B	0.0235	1	1.091E+05	1	2.495E+03
				2	2.980E+01
				3	4.148E-03
		2	3.970E+02	1	2.120E+02
				2	1.820E-01
		3	3.580E+00	1	2.320E+02
				2	2.250E-01
		4	1.335E-02	1	2.320E+02
		2	2.250E-01		
C	0.031	1	1.567E+04	1	1.820E+02
				2	1.680E-01
		2	5.250E+01	1	8.420E+01
				2	3.339E-02
		3	2.870E-01	1	8.760E+01
				2	3.638E-02
D	0.036	1	2.284E+05	1	9.970E+02
				2	2.219E+03
				3	6.540E+01
				4	2.853E-02
		2	7.721E+03	1	6.080E+02
				2	9.050E+00
				3	5.849E-05
		3	7.180E+00	1	8.060E+02
				2	1.490E+01
				3	1.058E-04
		4	1.414E-04	1	8.010E+02
				2	1.407E+02
				3	1.043E-04
E	0.041	1	6.483E+04	1	4.630E+02
				2	5.753E-02
		2	9.830E+02	1	3.570E+02
				2	1.730E+00
				3	4.148E-06
		3	1.920E-01	1	3.610E+02
2	1.750E+00				
		3	4.133E-06		
F	0.046	1	4.260E+05	1	8.011E+03
				2	5.199E-12
		2	5.997E-04	1	4.525E-06
G	0.051	1	0.000E+00	1	6.416E-06
H	0.056	1	0.000E+00	1	1.103E-05

Tabla 6.8 – Error residual relativo e iteraciones requeridas para la convergencia de los problemas local y global.

La convergencia local se ilustra en la Figura 6.14 para la primera iteración del paso de carga B ( $\varepsilon_P = 0.0235$ ) y para las iteraciones 1, 2 y 3 del paso de carga D ( $\varepsilon_P = 0.036$ ).

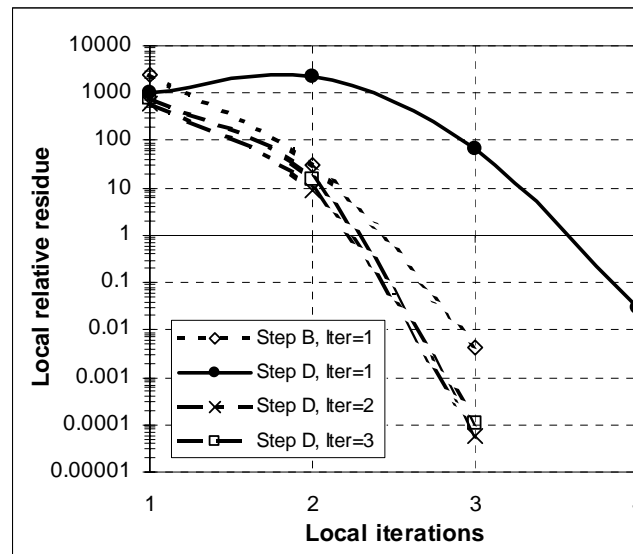


Figura 6.14 – Convergencia local para iteración 1 del paso B ( $\varepsilon_p = 0.0235$ ) y para las iteraciones 1, 2 y 3 del paso D ( $\varepsilon_p = 0.036$ ).

### 6.4.3 Comentarios

La compleja interacción entre los materiales componentes en las diferentes direcciones se tiene en cuenta de forma natural en el modelo propuesto para el material compuesto al verificarse, a lo largo de todo el proceso, la ecuación de cierre.

El modelo proporciona convergencia cuadrática tanto para el problema local como para el problema global.

Ambas velocidades de convergencia dependen de que los modelos constitutivos de los materiales componentes proporcionen sus tensores tangentes algorítmicos.

## 6.5 Calibración para los materiales componentes

### 6.5.1 Calibración cuasi-estática

El modelo numérico propuesto para simular el comportamiento de materiales compuestos está basado en la gestión adecuada de los modelos constitutivos de los diferentes materiales componentes teniendo en cuenta la morfología y distribución de la fibra dentro de la matriz.

Algunos parámetros mecánicos, como el módulo transversal de fibras anisótropas (v.g.: fibras de carbono), son imposibles de obtener mediante mediciones directas. Por lo tanto, debe ser deducido indirectamente mediante calibración de este

parámetro para ajustar la rigidez de la lámina, o mediante una fórmula que considere el módulo transversal del compuesto, el módulo de la matriz y la participación volumétrica de la fibra [3].

En el apartado 6.6 se indica un posible procedimiento de calibración a través de un ejemplo donde se deducen los parámetros de rigidez y resistencia de los materiales componentes en función de los modelos constitutivos adoptados para cada material teniendo en cuenta los ensayos experimentales efectuados sobre la lámina de compuesto.

Una vez que estos parámetros son determinados (calibrados), quedan asociados a ese material componente y resultan independientes de la orientación de fibras, de las cargas aplicadas o del tipo de problema. Esta aclaración es importante hacerla, para que el usuario del modelo constitutivo propuesto tenga en cuenta que no es necesaria una nueva calibración de los materiales para cada problema si se emplea el mismo material compuesto.

### **6.5.2 Proceso de calibración a fatiga**

Para estudiar la fatiga en materiales compuestos, es necesario calibrar los parámetros que determinan las curvas de vida SN de la matriz y de la fibra, con los ensayos practicados sobre láminas de compuesto.

Luego, los ensayos sobre laminados y estructuras permitirán verificar si la calibración ha sido realizada con éxito.

Como metodología de calibración de la fatiga, se propone lo siguiente:

1. calibrar la curva de vida SN de la matriz con ensayos de fatiga practicados a láminas con fibras a 90 grados;
2. calibrar la curva de vida SN de la fibra con ensayos de fatiga practicados a láminas con fibras a 0 grados;
3. verificar que las calibraciones realizadas responden al comportamiento de las láminas a 90 grados, en caso contrario volver al paso 1;
4. verificar con la respuesta de los ensayos a fatiga de laminados [45,-45]s, en caso contrario habrá que incluir un “material” interfase y calibrarlo;
5. comprobar con otros laminados y/o estructuras.



Nota: el modelo presente no incluye a la interfase dado que se supone adherencia perfecta entre fibra y matriz, pero ésta podría ser incluida mediante pequeñas modificaciones en las ecuaciones de compatibilidad de deformación.

## 6.6 Ejemplo de calibración para materiales del “ejercicio de fallo”

### 6.6.1 Consideraciones preliminares

Antes de proceder a la calibración de las propiedades de los materiales componentes mediante datos experimentales, es importante tener en cuenta una serie de consideraciones preliminares.

No todas las propiedades mecánicas de una lámina de compuesto se pueden predecir considerando únicamente las propiedades de los materiales componentes de forma individual. Este hecho ya ha sido mencionado por otros autores como Puck y Schürmann [6].

Efectivamente, la calibración también depende de los modelos constitutivos elegidos para los materiales componentes. La presencia de una matriz epoxi o metálica, por ejemplo, requerirá leyes constitutivas diferentes y, consecuentemente, procesos de calibración diferentes.

En el caso particular de plásticos reforzados con fibras, una característica importante que requieren los modelos de los componentes es que éstos no deben ser iso-resistentes. Para la matriz este es un hecho perfectamente conocido, debido a la presencia de micro-vacíos. Asimismo, en el caso de las fibras, se deberá considerar una resistencia a tracción y a compresión diferente para tener en cuenta el fenómeno del micro-pandeo, a falta de un modelo constitutivo que considere la inestabilidad local de la fibra.

Con este enfoque, el modelo constitutivo adoptado para simular el comportamiento de los materiales componentes en el presente proceso de calibración corresponde a un modelo de daño isótropo, con dos variables de daño distintas para tracción y compresión  $d^+/d^-$  (ver Faria *et al.* [7] y Cervera [8]).

A continuación, se realiza la calibración para el compuesto vidrio/epoxi LY556 considerado en el WWFE [1], cuyas propiedades se indican en Soden *et al* [9]. El compuesto resultante de esta calibración se contrastará con los datos experimentales proporcionados por Soden y colaboradores [10].

### 6.6.2 Parámetros de rigidez

Los parámetros de rigidez para la matriz y las fibras considerados son los mismos que se proporcionan para los materiales aislados.

Propiedades de rigidez	Matriz	Fibras
Módulo de Young [MPa]	3350	80000
Coeficiente de Poisson	0.35	0.20

Tabla 6.9 – Parámetros de rigidez adoptados para los materiales componentes de las láminas vidrio-epoxi LY556.

### 6.6.3 Parámetros resistentes para la matriz

Las resistencias a compresión y a tracción de la matriz se adoptan iguales a las resistencias que presenta en sentido transversal la lámina unidireccional, con el objetivo de incluir en el material matriz fenómenos locales que reducen la resistencia a tracción transversal del laminado como lo son los micro-vacíos. Estos valores son los que dan Hütter *et al.* [11], del cual se tomaron como referencia los resultados experimentales para el WWFE. Estos datos experimentales no se corresponden exactamente a las resistencias proporcionadas preliminarmente por Soden *et al.* [9].

Propiedades de resistencia de la matriz		
Resistencia tracción	$X_{mT}$ [MPa]	40
Resistencia compresión	$X_{mC}$ [MPa]	135

Tabla 6.10 – Propiedades de resistencia de la matriz en las láminas vidrio-epoxi LY556.

### 6.6.4 Parámetros resistentes para las fibras

Para calibrar las resistencias a tracción y a compresión de las fibras no es conveniente considerar sus parámetros como material aislado, siendo mejor considerar los parámetros de éstas pertenecientes a la lámina. Aquí también, el objetivo es incluir en el modelo constitutivo del material fibra de manera indirecta el fenómeno de micro-pandeo local.

De este modo, la cuota de resistencia de la lámina correspondiente a las fibras se puede obtener como:

$$X_{fT} = \frac{X_T - \sigma_{mT} V_m}{V_f} \quad X_{fC} = \frac{X_C - \sigma_{mC} V_m}{V_f},$$

donde  $\sigma_{mT}$  y  $\sigma_{mC}$  son, respectivamente, la tensión en la matriz que se corresponde con la resistencia última de la lámina a tracción y a compresión.

Además, pueden hacerse consideraciones extras acordes a cada caso particular.

En el caso de resistencia a compresión, se puede considerar que la matriz se mantiene en régimen elástico cuando se produce el fallo de la lámina; entonces se puede deducir:

$$\sigma_{mC} = \frac{E_m}{E_f} X_{fC} .$$

Lo que nos conduce a la siguiente fórmula:

$$X_{fC} = \frac{X_c}{V_f + V_m \frac{E_m}{E_f}} = \frac{570}{0.62 + 0.38 \frac{3.35}{80}} = 896 \text{ Mpa.}$$

Para la calibración de la resistencia longitudinal a tracción en un GFRP, se asume que en el momento en que se alcanza la resistencia última a tracción de las fibras, la matriz ya ha alcanzado su resistencia última y, por tanto, su contribución a la resistencia global de la lámina es inapreciable. Esta suposición lleva a:

$$X_{fT} = \frac{X_T}{V_f} = \frac{1140}{0.62} = 1839 \text{ MPa.}$$

Propiedades de resistencia de las fibras		
Resistencia a tracción	$X_{fT}$ [MPa]	1839
Resistencia a compresión	$X_{fC}$ [MPa]	896

Tabla 6.11 – Propiedades de resistencia de las fibras en una lámina vidrio-epoxi LY556.

### 6.6.5 Resumen de las propiedades calibradas

Finalmente, las propiedades de los materiales adoptadas para simular una lámina unidireccional tipo LY556 son las que se muestran en la tabla adjunta.

Propiedades mecánicas	Fibra	Matriz
Material	E-glass	epoxi
Ley constitutiva	Daño d+/d-	Daño d+/d-
Módulo de Young [MPa]	80000	3350
Coficiente de Poisson	0.20	0.35
Resistencia tracción [MPa]	1839	40
Resistencia compresión [MPa]	896	135
Fracción volumétrica	0.62	0.38

Tabla 6.12 – Propiedades calibradas de los componentes de la lámina vidrio-epoxi LY556.

El comportamiento no-lineal, posterior al inicio del fallo, debe ser calibrado mediante la adopción adecuada de las energías de fractura correspondientes a la

matriz y a la fibra, con el objetivo de reproducir las curvas tensión-deformación provistas por los ensayos experimentales.

#### 6.6.6 Observación

Un hecho observable es que el fenómeno del pandeo local de las fibras se tiene en cuenta reduciendo la resistencia a compresión de las mismas, y no modelando la inestabilidad local de la fibra. La principal diferencia entre estos dos enfoques es que en el primer caso, el daño en la fibra es irreversible y su inicio está prefijado, mientras que en el segundo caso, el inicio de la inestabilidad puede ser recuperado o aliviado si se proporciona una rigidez transversal adicional. Este segundo enfoque es más apropiado pero requiere de un mayor desarrollo teórico. A pesar de las limitaciones del primer enfoque, se usa éste en el estudio ya que supone un método efectivo para reproducir el comportamiento global.

### 6.7 Envoltentes de fallo

Con el objetivo de realizar un proceso de validación consistente, se han utilizado los resultados experimentales proporcionados en el “ejercicio de fallo” (WWFE) [1] para validar las predicciones realizadas por el modelo ESP. Este conjunto de datos se considera un punto de referencia importante para validar cualquier teoría que pretenda predecir la respuesta mecánica de laminados FRP.

Otra contribución importante del “ejercicio” es la comparación exhaustiva de las capacidades de las teorías existentes hoy en día para la predicción de fallo en laminados de compuestos (ver Soden *et al.* [12] y Kaddour *et al.* [13]).

Las envoltentes de fallo se obtienen ensayando un elemento compuesto hexaédrico. Las propiedades mecánicas de los materiales componentes empleadas son las que se han obtenido y calibrado en los apartados previos. Se aplican diferentes estados de carga a fuerza controlada de manera incremental hasta la rotura del compuesto, por cada punto de la envolvente de fallo.

#### 6.7.1 Envoltente de fallo para carga combinada longitudinal y tangencial

La Figura 6.15 muestra la envolvente de fallo biaxial obtenida con el modelo ESP al combinar una carga longitudinal y tangencial ( $\sigma_x$  vs.  $\tau_{xy}$ ) para la lámina unidireccional vidrio/epoxi LY556. Se han aplicado varios estados tensionales con diferentes relaciones  $\sigma_x:\tau_{xy}$ .

Como era de esperar, la envolvente obtenida es rectangular. Se obtiene buena concordancia con los resultados experimentales para las resistencias a tracción y a compresión, quedando levemente subestimada la resistencia tangencial.

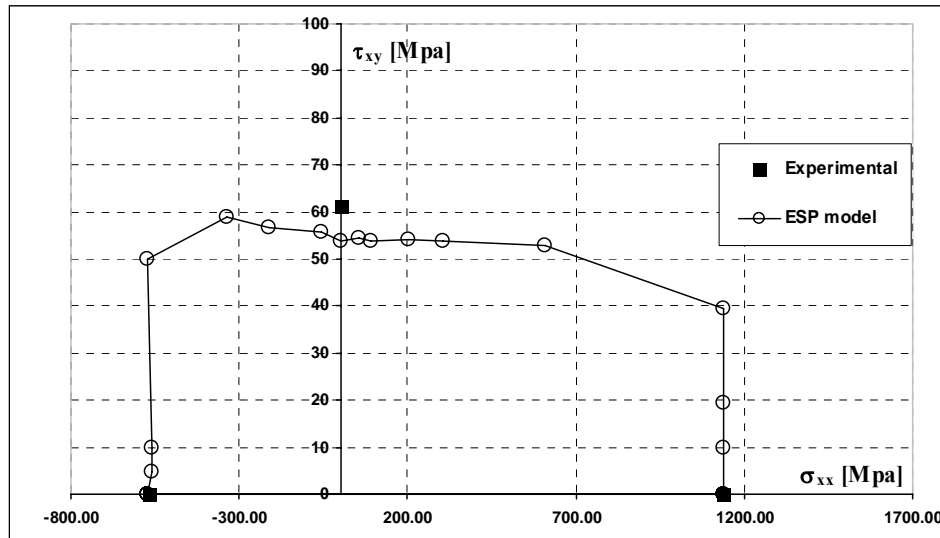


Figura 6.15 – Envolvente de fallo biaxial para la lámina unidireccional vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada longitudinal y tangencial.

### 6.7.2 Envolvente de fallo para carga combinada transversal y tangencial

La envolvente de fallo biaxial, obtenida con el modelo ESP, en el caso de combinar una carga transversal con una carga tangencial ( $\sigma_y$  vs.  $\tau_{xy}$ ), en la lámina unidireccional LY556, se muestra en la figura Figura 6.16. Se adjuntan también los datos experimentales proporcionados por Soden y colaboradores [10]. Para una mejor comparación, se grafica también el dominio proporcionado por Puck y Schürmann [6].

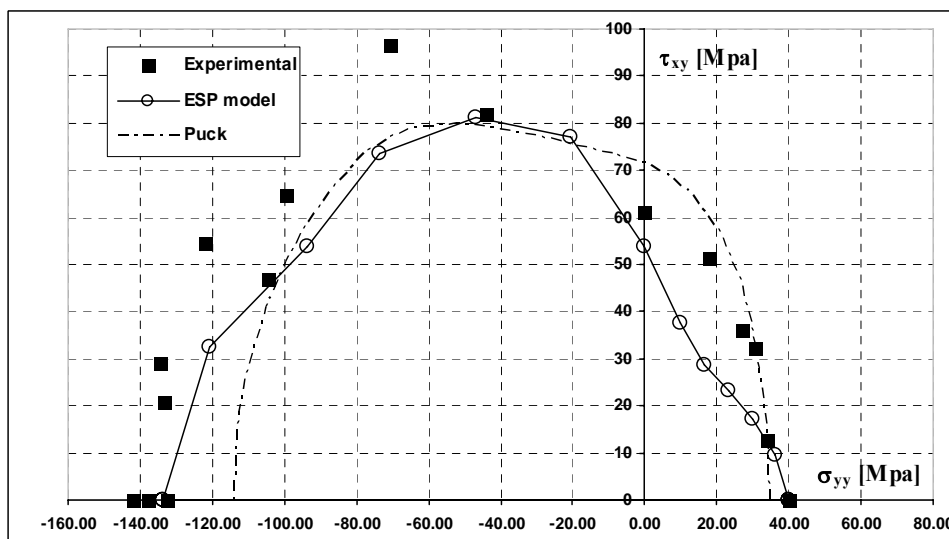


Figura 6.16 – Envolvente de fallo biaxial para una lámina unidireccional tipo vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada transversal y tangencial. Comparación entre los datos experimentales, la estimación de Puck y los resultados obtenidos con el modelo ESP.

Tanto para las resistencias transversales a tracción como a compresión, los resultados obtenidos con el modelo ESP se ajustan mucho a los datos experimentales. La respuesta tangencial se encuentra un poco subestimada en el primer cuadrante, probablemente debido a que la superficie de daño del modelo constitutivo elegido para la matriz no es la más apropiada.

### 6.7.3 Envolventes de fallo para laminado GRP [90°/±30°/90°]

En este apartado se obtienen las envolventes de fallo para un laminado [90°/±30°/90°] realizado con láminas vidrio/epoxi LY556. La configuración exacta de las capas es la siguiente: [90°/+30°/-30°/-30°/+30°/90°] y se muestra de forma esquemática en la Figura 6.17.

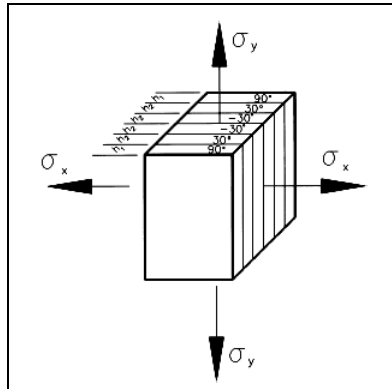


Figura 6.17 – Disposición de las capas para un laminado [90°/±30°/90°] de vidrio-epoxi LY556.

En la Figura 6.18 se muestran los puntos de fallo obtenidos experimentalmente, para una carga combinada longitudinal y tangencial ( $\sigma_x$  vs.  $\tau_{xy}$ ), junto con la envolvente de fallo obtenida con el modelo ESP y la estimada por Puck.

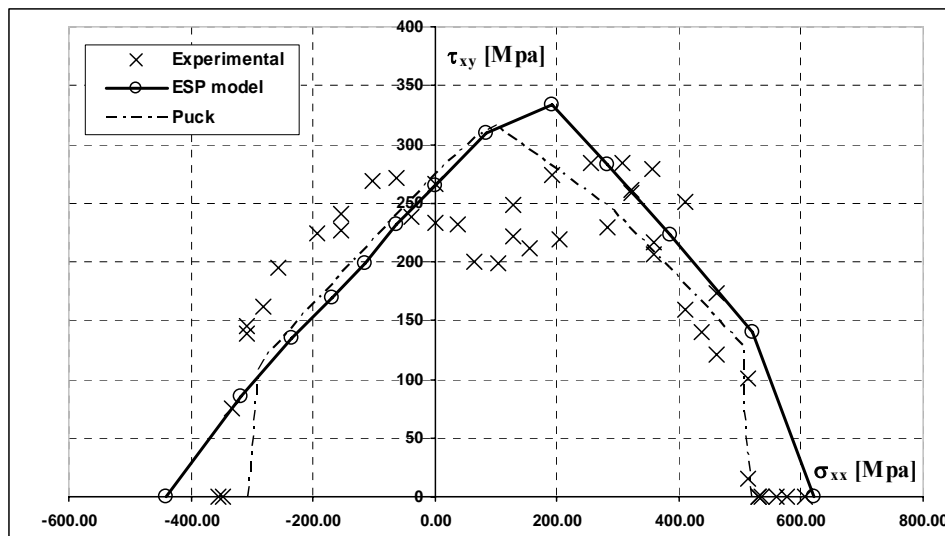


Figura 6.18 – Envolvente de fallo biaxial para un laminado [90°/±30°/90°] de vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada longitudinal y tangencial. Comparación entre los datos experimentales, la estimación de Puck y los resultados obtenidos con el modelo ESP

El modelo ESP proporciona una concordancia aceptable con los datos experimentales y con la envolvente proporcionada por Puck.

Observación: en las zonas en las que el modelo ESP sobreestima ligeramente la resistencia (i.e. para compresión pura  $\sigma_x$  y en la zona de máximo  $\tau_{xy}$ ), el fallo del laminado se debe al pandeo local y a la deslaminación, fenómeno no considerado en la presente formulación del modelo ESP.

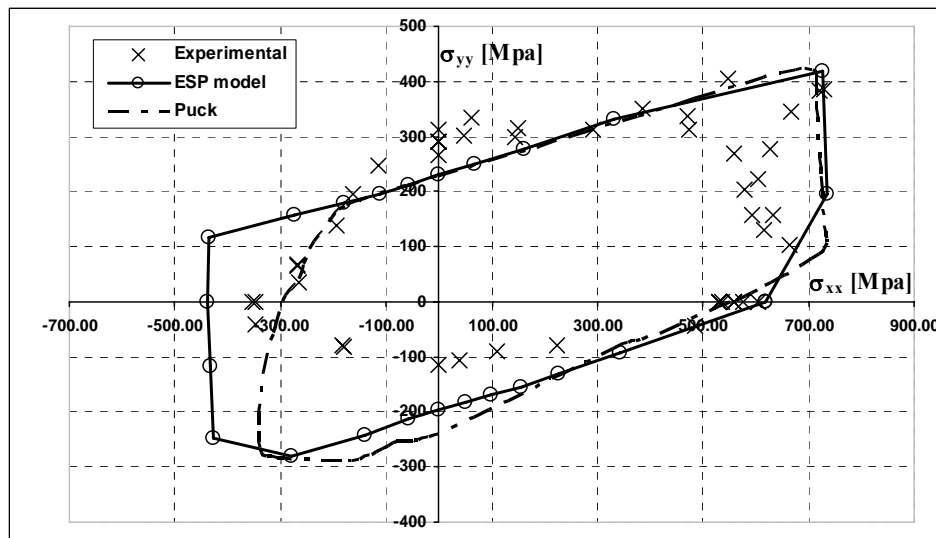


Figura 6.19 – Envolvente de fallo biaxial para laminado  $[90^\circ/\pm 30^\circ/90^\circ]$  de vidrio-epoxi LY556 bajo una carga combinada longitudinal y transversal. Comparación entre datos experimentales, estimación de Puck y predicción modelo ESP.

En la Figura 6.19 se representan los puntos de fallo, obtenidos experimentalmente, bajo una carga directa combinada ( $\sigma_x$  vs.  $\sigma_y$ ). Se muestra también la envolvente de fallo obtenida con el modelo ESP y la estimada por Puck y Schürmann [6].

Observación: según lo indicado en la literatura, los ensayos realizados en especímenes tubulares, bajo una presión externa junto con una compresión axial, muestran que el comportamiento general está gobernado por pandeo global del espécimen. Debido a esto, en el cuadrante  $\sigma_x < 0$ ,  $\sigma_y < 0$ , no se pueden comparar los resultados experimentales con las predicciones teóricas, al no tenerse en cuenta el pandeo global en estas últimas.

## Referencias

- [1] Hinton M. J. & Soden P. D. (1998). "Predicting failure in composite laminates: The background to the exercise". *Composites Science and Technology*, Vol. 58, 1001-1010.
- [2] Reddy J.N. (2004). "*Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis.*". 2nd edition. CRC Press, New York (USA).
- [3] Barbero E.J. (1998). "*Introduction to composite materials design*". Taylor & Francis, London (UK).
- [4] Halpin J.C. & Tsai S.W. (1969). "Effects of environmental factors on composite materials". *Air Force Materials Lab-Technical report 67-423*, Department of Defense, (USA).
- [5] Jones R.M. (1975). "*Mechanics of composite materials*". McGraw-Hill, New York (USA).
- [6] Puck A. & Schürmann H. (1998). "Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models". *Composites Science and Technology*, Vol. 58, 1045-1067.
- [7] Faria R, Oliver J, Cervera M. (1998). "A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures". *International Journal of Solids and Structures*, 35(14):1533-1558.
- [8] Cervera M. (2003). "*Viscoelasticity and rate-dependent continuum damage models*". Monograph M79. Barcelona: CIMNE.
- [9] Soden P. D., Hinton M. J. & Kaddour A. S. (1998). "Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates". *Composites Science and Technology*, Vol. 58, 1011-1022.
- [10] Soden P. D., Hinton M. J. & Kaddour A. S. (2002). "Biaxial test results for strength and deformation of a range of E-glass and carbon fibre reinforced composite laminates: failure exercise benchmark data". *Composites Science and Technology*, Vol. 62, 1489–1514.
- [11] Hütter U, Schelling H, Krauss H (1974). "An experimental study to determine failure envelope of composite materials with tubular specimen under combined loads and comparison between several classical criteria".



In: *Failure Modes Of Composite Materials With Organic Matrices And Other Consequences On Design*. NATO, AGRAD, Conf Proc No. 163, Munich (Germany), 13–19.

- [12] Soden P. D., Hinton M. J. & Kaddour A. S. (1998). "A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates". *Composites Science and Technology*, Vol. 58, 1225-1254.
- [13] Kaddour A. S., Hinton M. J. & Soden P. D. (2004). "A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates: additional contributions". *Composites Science and Technology*, Vol. 64, 449-476.

## 7 APLICACIONES

El trabajo de investigación volcado en el presente documento podría darse por concluido en el capítulo anterior. Sin embargo, y con el propósito de mostrar la robustez y la capacidad del modelo propuesto para resolver distintos tipos de problemas, en este capítulo, se presentan de forma breve pero sugerente algunos ejemplos prácticos. Con este objetivo, se estudian materiales compuestos sometidos a carga cuasi-estática, fatiga y carga cíclica creciente con daño en componentes, ensayos de tracción cuasi-estática *off axis* de láminas doblemente hendidas, estructuras de placas sándwich. Para cada ejemplo, se describen la geometría, materiales y condiciones de contorno del problema, además de comentar los resultados obtenidos.

También, se estudia la respuesta cualitativa de ensayos de tracción de un espécimen con forma de Z discretizado con elementos del tipo lámina DKT laminado. Y finalmente, se realiza la simulación numérica de una estructura de mayor complejidad consistente en un subsistema estructural que emplea materiales compuestos laminados delgados.

### 7.1 Tracción cuasi-estática y estimación de vida por fatiga

En esta sección se muestra, a modo de validación, una aplicación del modelo propuesto que consiste en la simulación numérica de especímenes laminados, reforzados con fibras de carbono, sometidos a ensayos de tracción cuasi-estática y

a fatiga. En cada caso se contrasta la respuesta numérica con los resultados experimentales realizados por ISD (*Institute for Statics and Dynamics*), Universidad de Stuttgart, Alemania; a través del proyecto europeo “COMPASS” [1].

Como ya se comentó en capítulos anteriores, la implementación del modelo propuesto ha sido realizada en el código de elementos finitos COMET [2], desarrollado conjuntamente por CIMNE y el Departamento de Resistencia de Materiales (Univ. Politécnica de Cataluña).

### 7.1.1 Descripción de la geometría y materiales de los especímenes

El material investigado es un laminado con fibras a  $90^\circ$ - $0^\circ$ - $90^\circ$  por capa. La fibra utilizada es de carbono con alta resistencia última a tracción (Tenax HTA 5241) y la matriz es una resina epoxi (Bakelite Rütapox VE 4434) cuyas propiedades se muestran en la Tabla 7.1.

Todos los especímenes consisten en 3 capas de lámina pero con diferentes orientaciones:  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  (tipo 1),  $90^\circ/0^\circ/90^\circ$  (tipo 2) y  $45^\circ/-45^\circ/45^\circ$  (tipo 3). El espesor de las subcapas es elegido de manera tal que el número de fibras sea el mismo en ambas direcciones (ver Tabla 7.2) con el objetivo de mantener la simetría del laminado. La longitud de los especímenes ensayados es de 260 mm, siendo su ancho medio de 30 mm para tipos 1-2, y de 40 mm para el tipo 3.

Propiedades de los Componentes	Unidad	Fibras	Resina
Densidad ( $m_c$ )	kg/m <sup>3</sup>	1770	1092
Resistencia última a tracción	MPa	3950	
Deformación última a tracción	%	1.5	
Módulo de Young paralelo	GPa	238	4
Módulo de Young perpendicular	GPa	28	4
Módulo de cortante	GPa	50	1.5
Coeficiente de Poisson ( $\nu_{xy}$ )	-	0.23	0.35
Participación volumétrica ( $k_c$ )	-	0.49	0.51

Tabla 7.1 – Propiedades mecánicas de los materiales, facilitadas por los fabricantes.

Capa	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Espesor [mm]
1	$0^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	0.175
	$90^\circ$	$0^\circ$	$-45^\circ$	0.350
	$0^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	0.175
2	$90^\circ$	$0^\circ$	$-45^\circ$	0.175
	$0^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	0.350 sim.
	$90^\circ$	$0^\circ$	$-45^\circ$	0.175
3	$0^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	0.175
	$90^\circ$	$0^\circ$	$-45^\circ$	0.350
	$0^\circ$	$90^\circ$	$45^\circ$	0.175

Tabla 7.2 – Orientación y espesor de subcapas para cada tipo de espécimen.

Los parámetros elásticos y de rotura obtenidos experimentalmente por ISD para cada tipo de espécimen se muestran en la Tabla 7.3. Junto al valor medio de cada parámetro, se indica su coeficiente de variación (C.V.) como indicador de la dispersión de los datos experimentales.

Propiedades mecánicas a tracción	Espécimen tipo 1		Espécimen tipo 2		Espécimen tipo 3	
	Valor medio	C.V.	Valor medio	C.V.	Valor medio	C.V.
Módulo de Young	65179 MPa	3.8 %	66587 MPa	5.3 %	14029 MPa	7.2 %
Coeficiente de Poisson	0.0372	23.0 %	0.0628	88.2 %	0.8124	4.7 %
Resistencia última	610.2 MPa	11.5 %	722.4 MPa	8.8 %	113.0 MPa	4.6 %
Deformación última	0.0238	18.2 %	0.0262	12.8 %	0.0314	17.4 %

Tabla 7.3 – Resultados experimentales para cada tipo de espécimen.

### 7.1.2 Simulación numérica con el modelo propuesto

La simulación numérica se efectuó sobre un “elemento compuesto hexaédrico” tomando los valores mecánicos de los materiales componentes y la orientación de las fibras dentro del laminado compuesto como entrada de datos. Fibra y matriz, fueron modelados como materiales elástico y elasto-plástico, respectivamente.

Propiedades Elásticas	Unidades	Espécimen tipo 1 & 2	Espécimen tipo 3
Módulo de Young x	MPa	65369	13136
Módulo de Young y	MPa	65369	13136
Módulo de Young z	MPa	9699	9699
Coef. de Poisson xy	-	0.0342	0.8059
Módulo cortante xy	MPa	3637	31603
Módulo cortante xz	MPa	3118	3118
Módulo cortante yz	MPa	3118	3118

Tabla 7.4 – Propiedades elásticas de los laminados obtenidas numéricamente.

En la Tabla 7.4 se indican los resultados numéricos para las propiedades elásticas globales de los diferentes tipos de laminados. Se observa una excelente concordancia con las propiedades obtenidas experimentalmente (Tabla 7.3). Nótese que el valor del coeficiente de Poisson alcanza un valor de 0.8 para los especímenes tipo 3. Esto sería imposible en un material isótropo. Pero en un material ortótropo, la restricción isótropa pierde validez y coeficientes de Poisson mayores que 0.5 son válidos y realistas.

#### a) Ensayos de tracción cuasi-estática

Las figuras siguientes muestran curvas comparativas de resultados obtenidas numérica y experimentalmente.

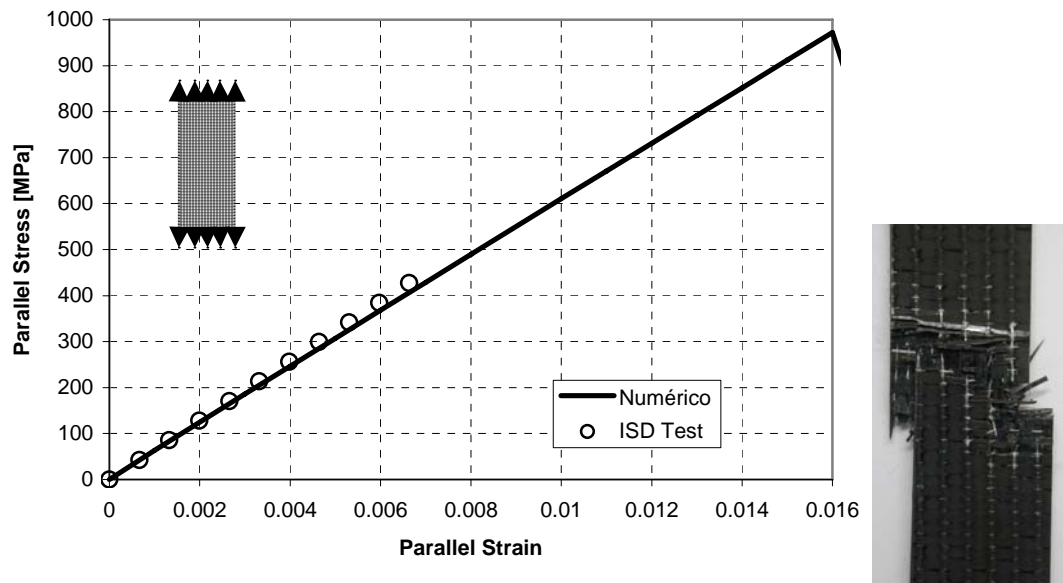


Figura 7.1 – Curva tensión-deformación para especímenes tipo 1 y 2.

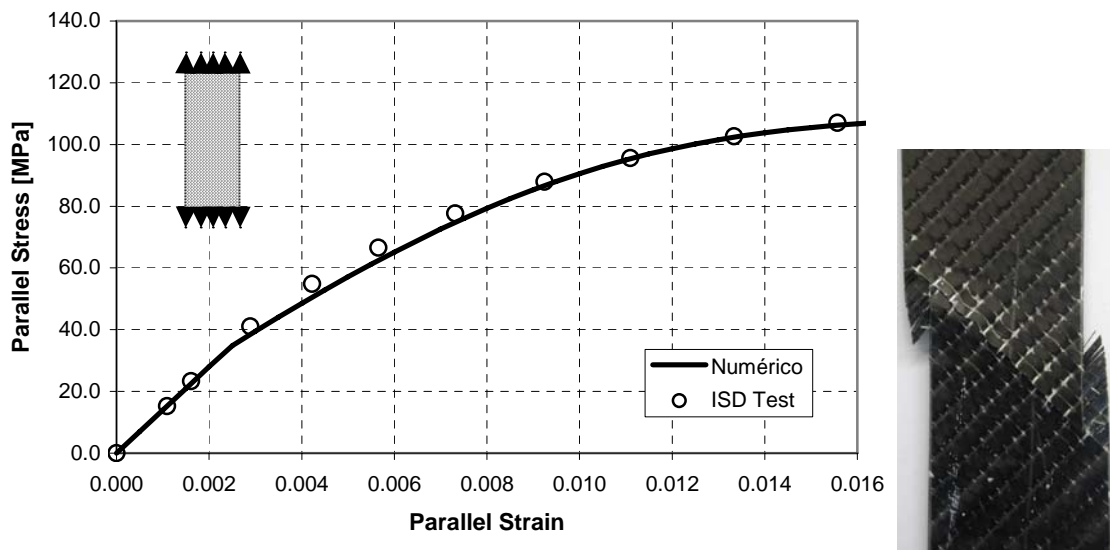


Figura 7.2 – Curva tensión-deformación para especímenes tipo 3.

En la Figura 7.1 se observa que la respuesta tensión-deformación de los especímenes tipo 1-2 es casi lineal, pudiéndose apreciar un muy buen ajuste en el rango donde los datos experimentales se proveen. Esta linealidad puede deberse a que los tipos 1-2 tienen fibras alineadas con la dirección de carga. Existe discrepancia entre los valores aportados correspondientes a la tensión y deformación última del compuesto.

En el caso de especímenes tipo 3, se observa un fuerte comportamiento no lineal (Figura 7.2) con una muy buena correlación entre resultados experimentales y numéricos. En este caso la no linealidad puede responder a una influencia primaria de la matriz sobre el comportamiento del compuesto.

### b) Ensayos de fatiga

Las pruebas de durabilidad consisten en la aplicación de cargas cíclicas a tracción con un cociente  $S_{\min}/S_{\max} = 0.1$  donde la tensión máxima empleada depende del espesor y tipo de las muestras. Para los especímenes de 3 capas tipo 1, se aplican hasta rotura los siguientes niveles de la carga: 440, 480 y 500 MPa.

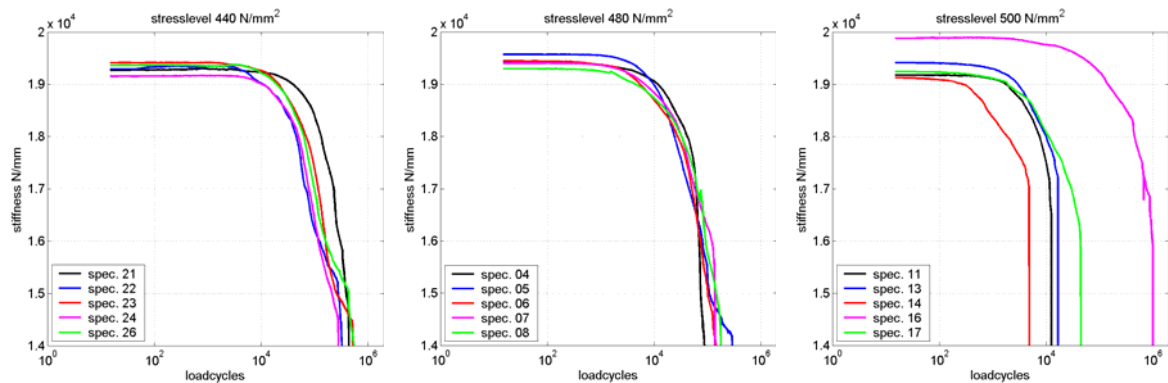


Figura 7.3 – Comportamiento a fatiga de los especímenes tipo 1. Resultados experimentales para niveles de carga de 440, 480 y 500 MPa.

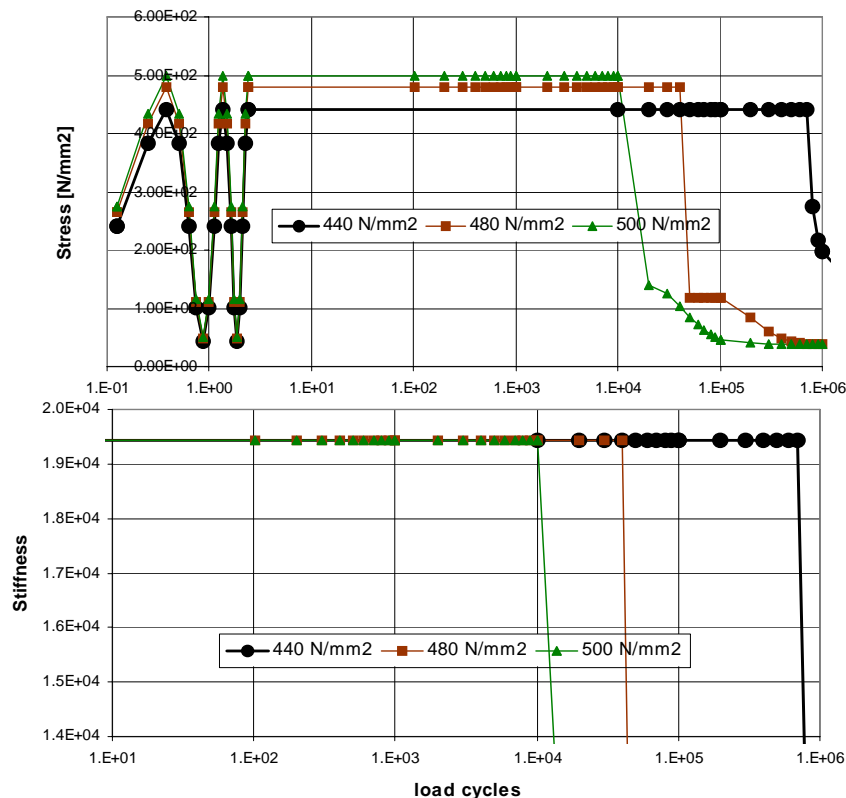


Figura 7.4 – Comportamiento a fatiga de los especímenes tipo 1. Simulaciones numéricas para niveles de carga de 440, 480 y 500 MPa.

El progreso del daño dentro de los especímenes examinados se observa de diversas maneras: control de rigidez (la disminución de la rigidez está relacionada

con el progreso del daño), medición de la histéresis (la energía disipada es equivalente al área del lazo de histéresis indicando progreso del daño) y radiación térmica. En la Figura 7.3, se sintetizan las curvas de rigidez resultante en función del número de ciclos para diversos niveles de carga.

En la Figura 7.4, se presentan los resultados correspondientes a las simulaciones numéricas. Buena concordancia se obtiene para el caso de carga de 440 MPa y aceptable para el caso de 480 MPa. Resulta difícil confrontar el caso de carga de 500 MPa dada la gran dispersión que presentan los resultados experimentales. Observando los resultados correspondientes a los tres niveles de carga, se aprecia un incremento importante en el número de ciclos a rotura.

### **7.1.3 Conclusiones**

El modelo numérico propuesto permite captar el comportamiento complejo que se produce en los materiales compuestos cuando uno o más componentes entran en régimen no lineal.

Buena concordancia es alcanzada tanto en los parámetros elásticos globales como en la respuesta plástica (no-lineal) al contrastar resultados simulados numéricamente con aquellos obtenidos experimentalmente de ensayos cuasi-estáticos a tracción de laminados reforzados con fibras en diferentes direcciones.

La comparación entre los resultados experimentales y numéricos de muestras de material compuesto sometidas a fatiga, permite decir que la metodología presentada aquí es muy prometedora para el análisis de durabilidad de estructuras de materiales compuestos.

## **7.2 Carga cíclica creciente con daño en componentes**

Este ejemplo de aplicación consiste en analizar el comportamiento de un elemento de volumen representativo 3D de una lámina de matriz frágil (modelo de daño) reforzada con fibras largas unidireccionales (anisótropas y elásticas hasta rotura) sometido a un ensayo de carga cíclica tracción-compresión.

### **7.2.1 Descripción geométrica y condiciones de contorno**

La Figura 7.5 ilustra la geometría y condiciones de contorno del problema. Como el objetivo es estudiar la respuesta del material, las cargas se aplicarán sobre un solo elemento finito 3D sólido del tipo isoparamétrico de 8 nodos. La cara 1,2,3,4 tiene restringido su desplazamiento en la dirección Z; la cara 1,4,8,5 en la

dirección X; y la cara 1,2,6,5 en la dirección Y. Sobre la cara 2,3,7,6 se aplica un desplazamiento impuesto para reproducir un ensayo a deformación controlada.

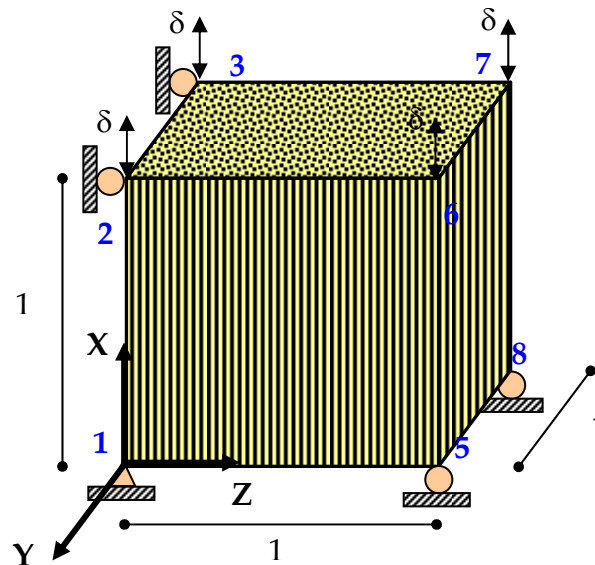


Figura 7.5 – Geometría y condiciones de contorno

### 7.2.2 Descripción de materiales

La tabla siguiente muestra las propiedades elásticas y de rotura de los materiales utilizados.

Propiedades de los Componentes	Unidad	Fibras	Resina
Densidad ( $m_c$ )	kg/m <sup>3</sup>	1770	1092
Resistencia última a tracción	MPa	100	15
Energía de fractura		-	0.015
Módulo de Young paralelo	GPa	23.8	16
Módulo de Young perpendicular	GPa	2.8	16
Coefficiente de Poisson ( $\nu_{xy}$ )	-	0.23	0.35
Participación volumétrica ( $k_c$ )	-	0.49	0.51

Tabla 7.5 – Propiedades mecánicas de los materiales modelados

### 7.2.3 Simulación numérica

La simulación numérica se efectúa tomando los valores mecánicos de los materiales componentes y su morfología dentro del compuesto como entrada de datos.

Fibra y matriz, son modelados numéricamente como materiales elástico ortótropo y elástico isótropo con modelo de daño escalar, respectivamente.



Se imponen desplazamientos en forma cíclica a tracción y compresión alternadamente, y de manera creciente en magnitud con el fin de superar el umbral de daño en cada caso. La Figura 7.6 ilustra este proceso de cargas y descargas sucesivas.

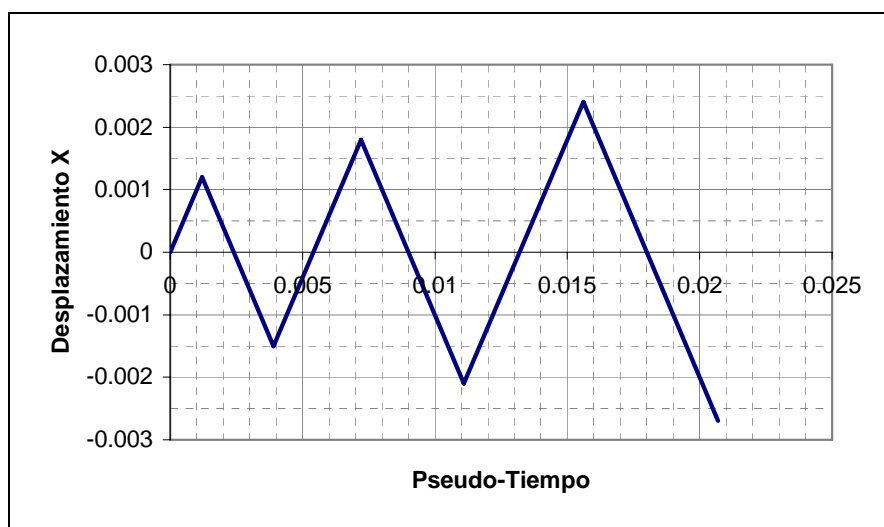


Figura 7.6 – Función de carga-descarga aplicada a los desplazamientos.

#### 7.2.4 Resultados obtenidos

La Figura 7.7 muestra los comportamientos del material compuesto y de sus fases componentes al ser sometidos a la historia de carga cíclica previamente descrita. Se aprecia el comportamiento elástico lineal de la fibra que se carga y descarga siempre con el mismo módulo elástico (no sufre degradación o daño). Mientras que la degradación progresiva e irreversible de la matriz también se ve reflejada en el comportamiento del compuesto. A medida que se produce el daño en la matriz, el módulo elástico del compuesto se ve afectado y tiende a un valor teórico estable dado por la elasticidad de la fibra. El módulo degradado final es igual al de la fibra multiplicada por su participación volumétrica.

Puede apreciarse en detalle el comportamiento de la matriz observando la Figura 7.8. Al inicio del proceso de carga, la matriz posee un estado no dañado y por lo tanto su módulo elástico no presenta degradación. Al llegar al umbral de tensiones, comienza el proceso de degradación produciéndose un aumento de la variable de daño.

Luego, al proceder a la descarga, las tensiones decrecen elásticamente pero con un módulo degradado, que no se “desactiva” al producirse la recarga en compresión. Esto es debido a que este modelo de daño no puede identificar daño diferenciado a tracción y a compresión.

Nuevamente, al alcanzar la envolvente de tensiones a compresión, la degradación continúa aumentando hasta que se produce una nueva descarga y posterior recarga con una pendiente inferior a la anterior descarga producto del aumento de la variable de daño. Las siguientes etapas de carga y descarga de desarrollan de manera similar. En ningún caso se aprecian deformaciones inelásticas.

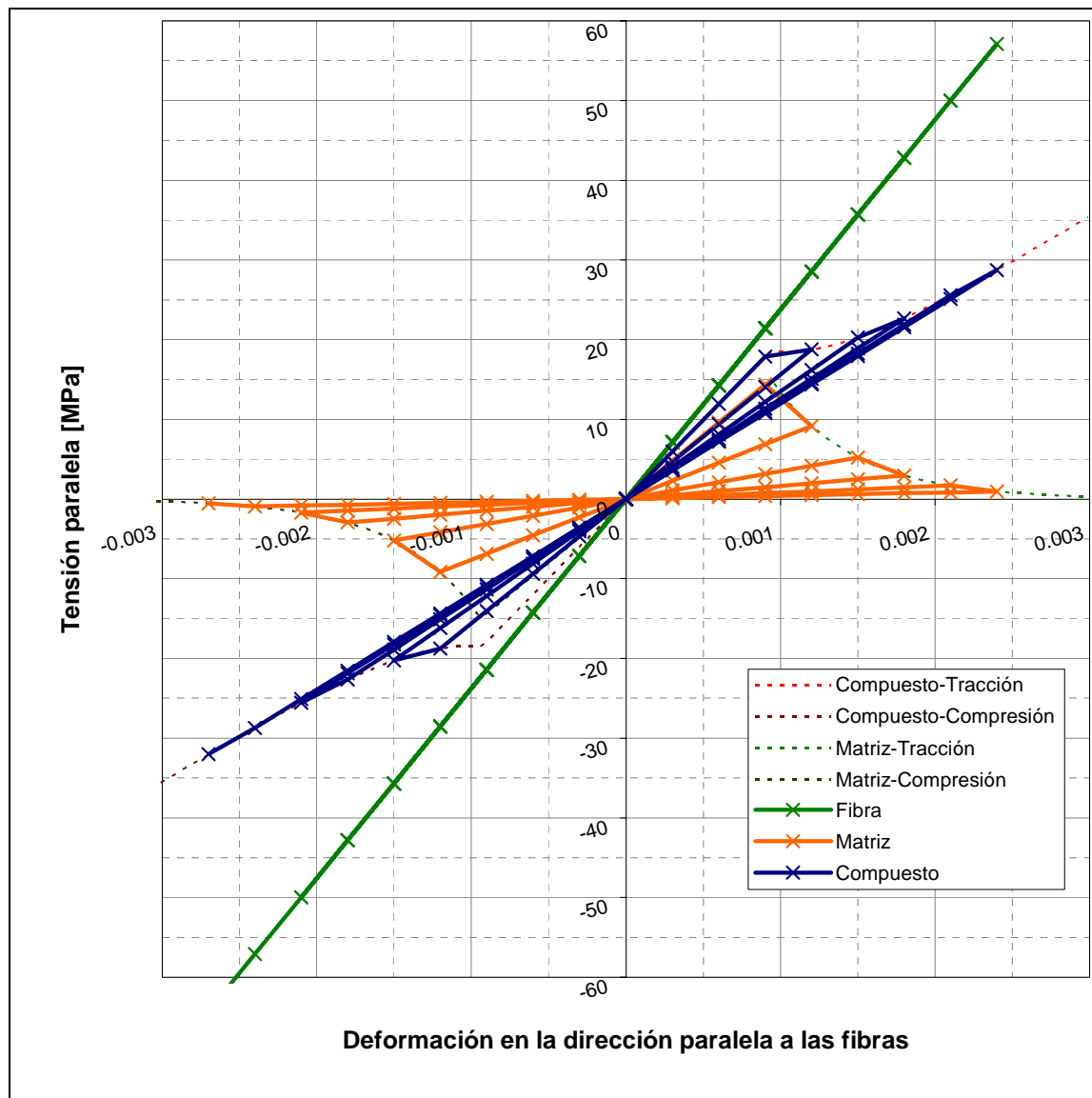


Figura 7.7 – Curvas tensión-deformación del compuesto y de los componentes bajo carga cíclica.

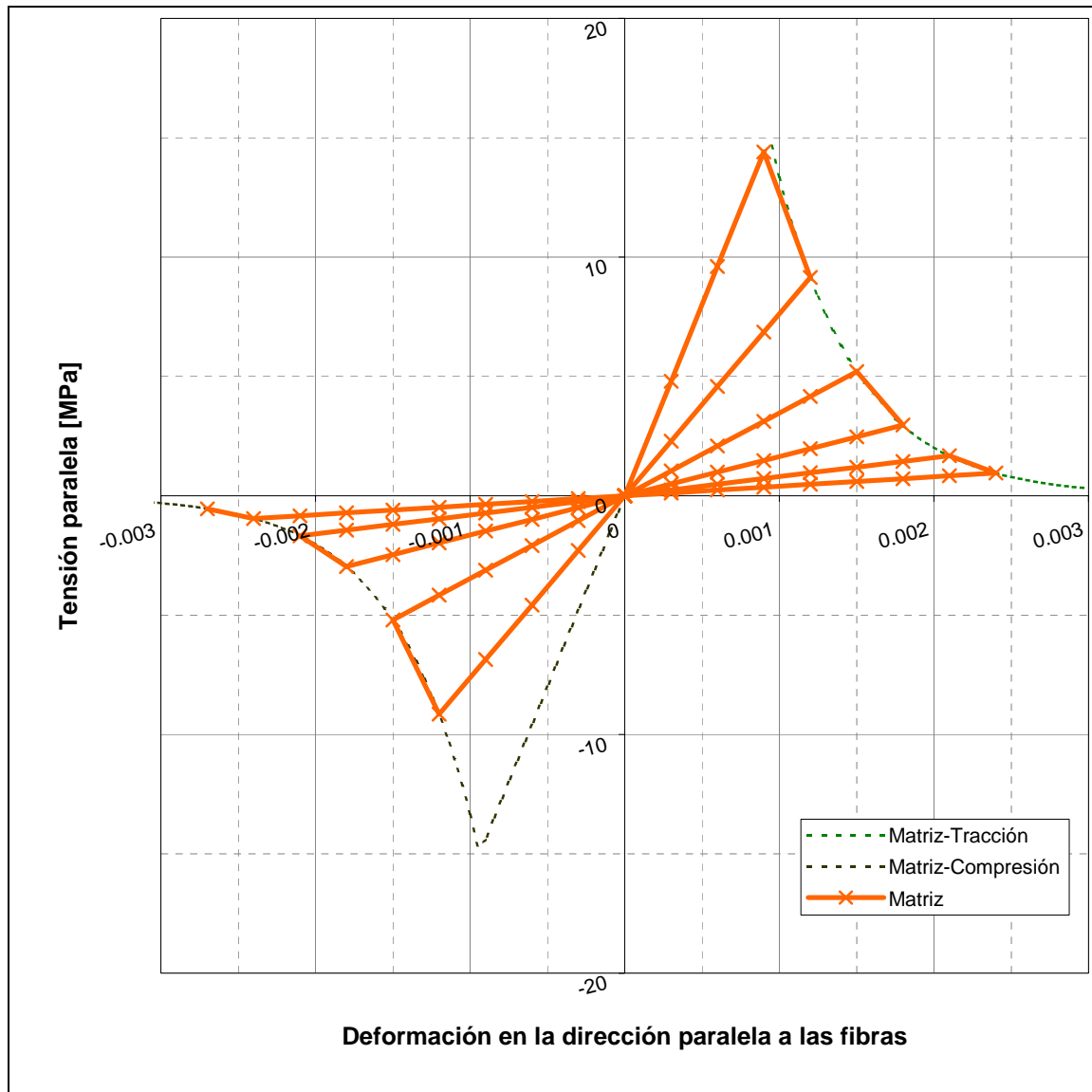


Figura 7.8 – Curva tensión-deformación de la matriz sometida a ciclos de tracción y compresión.

Por último, la Figura 7.9 muestra cómo las sucesivas etapas de carga, descarga y recarga afectan la respuesta del compuesto y cómo la evolución del daño se desarrolla siguiendo la curva envolvente tensiones a tracción y a compresión.

### 7.2.5 Conclusiones

Los resultados numéricos obtenidos muestran la capacidad del modelo propuesto para describir el comportamiento de una lámina de matriz frágil reforzada con fibras elásticas unidireccionales en ensayo cíclico de tracción-compresión, para el caso de componentes con daño escalar isótropo.

Podría extenderse su aplicación a casos con componentes cuyos modelos constitutivos representen otros tipos de daño en el material como son los que consideran tensiones umbrales diferenciadas a tracción y compresión, daño unilateral, daño activo/pasivo, daño anisótropo (Luccioni & Oller, [3] y [4]) y daño acoplado con plasticidad (Besson *et al.* [5]; Simo & Ju [6]; Luccioni *et al.* [7]; Faria *et al.* [8]), etc.

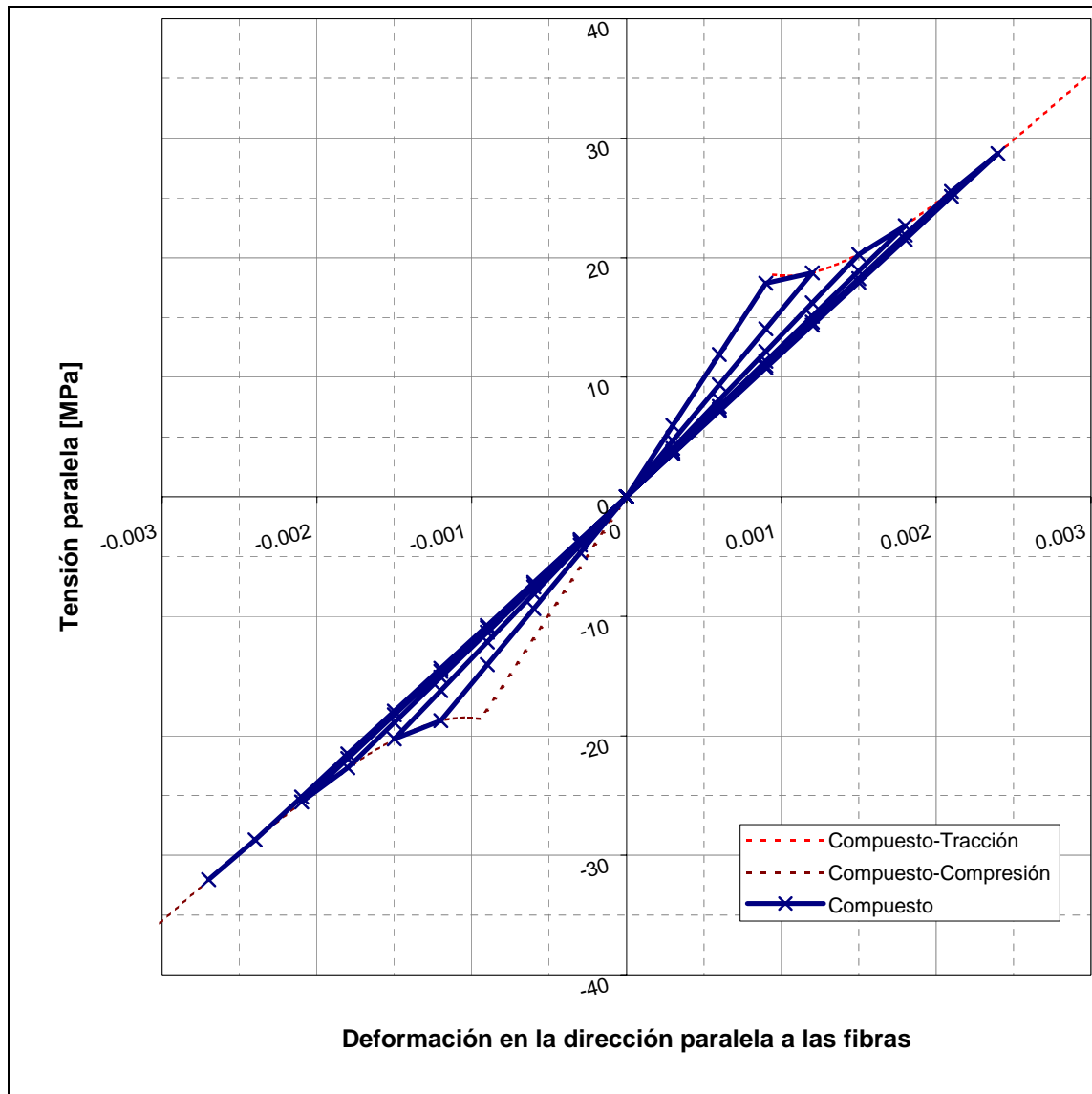


Figura 7.9 – Curva tensión-deformación del compuesto sometido a ciclos de tracción y compresión.

### 7.3 Lámina a 45 grados doblemente hendida.

Se realiza a continuación la simulación numérica de un ensayo experimental cuasi-estático con carga *off axis*. El objetivo principal es observar la respuesta cualitativa de una lámina reforzada con fibras de carbono unidireccionales cuando éstas no coinciden con la dirección de aplicación de la carga. En el presente ejemplo se toma una lámina doblemente hendida con fibras orientadas a 45 grados.

#### 7.3.1 Descripción geométrica y de material

Las dimensiones del espécimen son las siguientes: 160 mm de largo, 50 mm de ancho y 1 mm de espesor, con hendiduras laterales de 5 mm. Para reproducir un ensayo a deformación controlada, se somete la cara superior a un desplazamiento impuesto en la dirección longitudinal, mientras la cara inferior es restringida. La malla ha sido originalmente generada en 2D por Car [9]. Aquí se presenta una expansión tridimensional usando un elemento sólido 3D (isoparamétrico de 8 nodos y 8 puntos de Gauss) en el espesor. Se emplean 4194 nodos y 1988 elementos hexaédricos para discretizar la geometría.

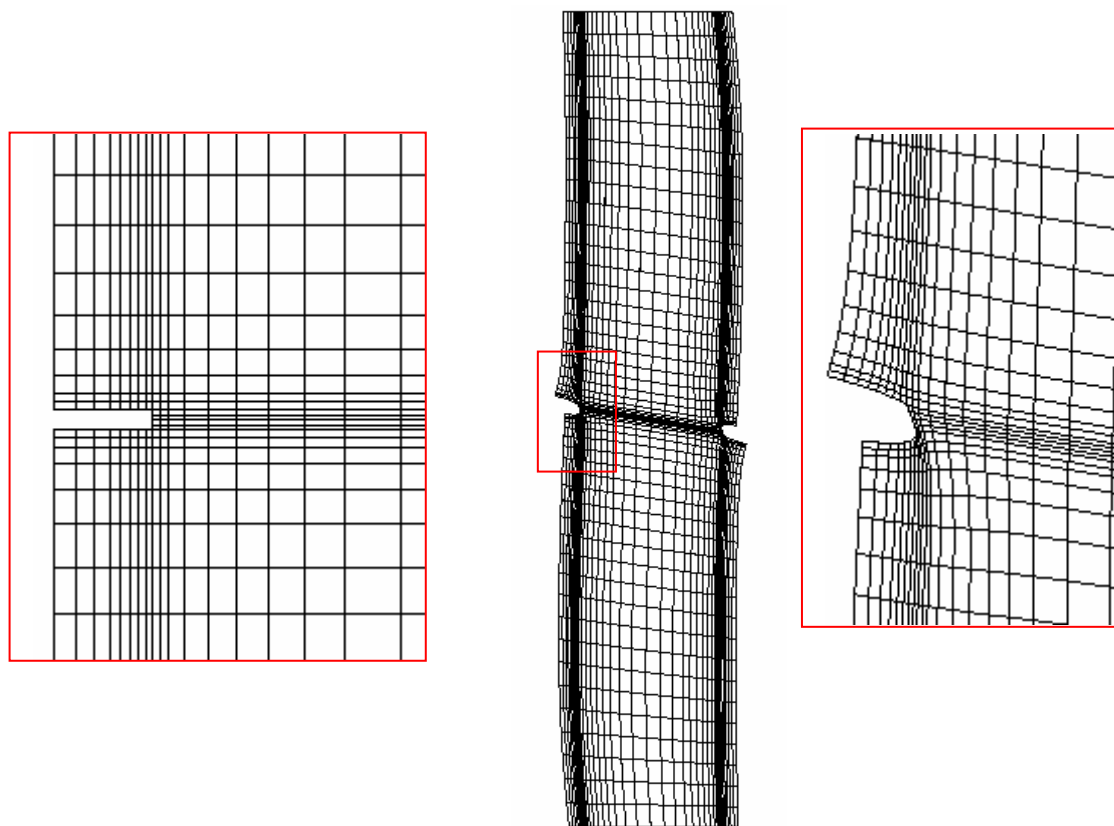


Figura 7.10 – Malla de elementos finitos (un elemento 3D en el espesor) con detalles en configuración inicial (izquierda) y deformada x10 (derecha).

En la Figura 2.3 se aprecia la malla de elementos finitos utilizada, en configuración deformada de la probeta. La geometría deformada se encuentra ampliada en escala de 10 para ilustrar mejor el comportamiento de la probeta.

### 7.3.2 Resultados obtenidos

En la Fig.7.11 y siguientes se ilustran los mapas de las componentes del desplazamiento y su módulo, como así también los de las tensiones principales, normales y tangenciales. Todas estas ilustraciones muestran el contorno deformado ( $\times 10$ ) del espécimen, el cual se corresponde cualitativamente con la respuesta esperada dado que las fibras no están alineadas con la dirección de la carga.

Tal cual lo esperado, se aprecia una concentración de tensiones en la zona donde se han practicado las hendiduras. Nótese además cómo las tensiones tangenciales inician su propagación a lo largo de la dirección de las fibras. Esto se corresponde con la debilidad del material compuesto ante este tipo de esfuerzos.

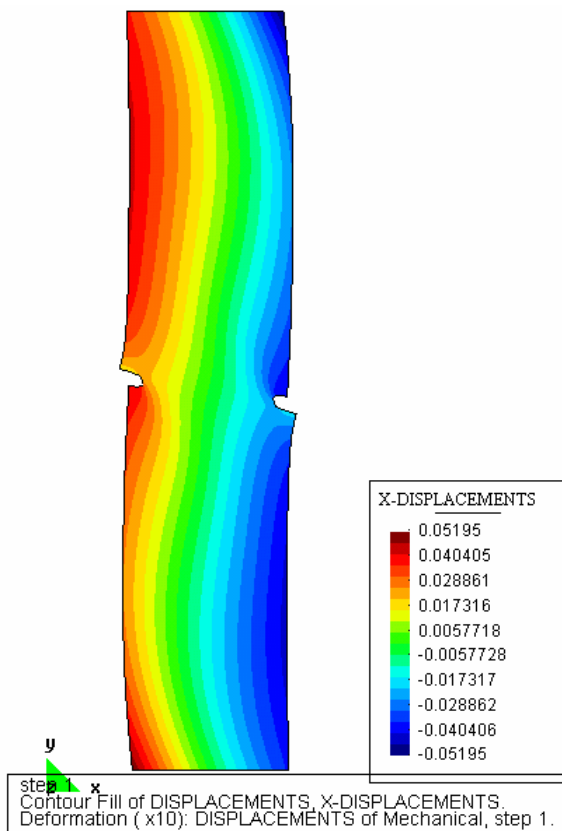


Fig.7.11 – Desplazamientos X.

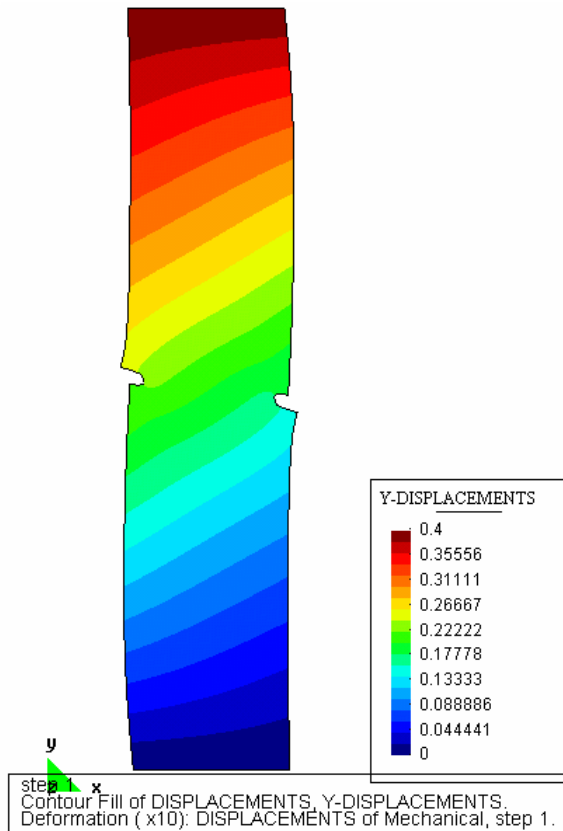


Fig.7.12 – Desplazamientos Y.

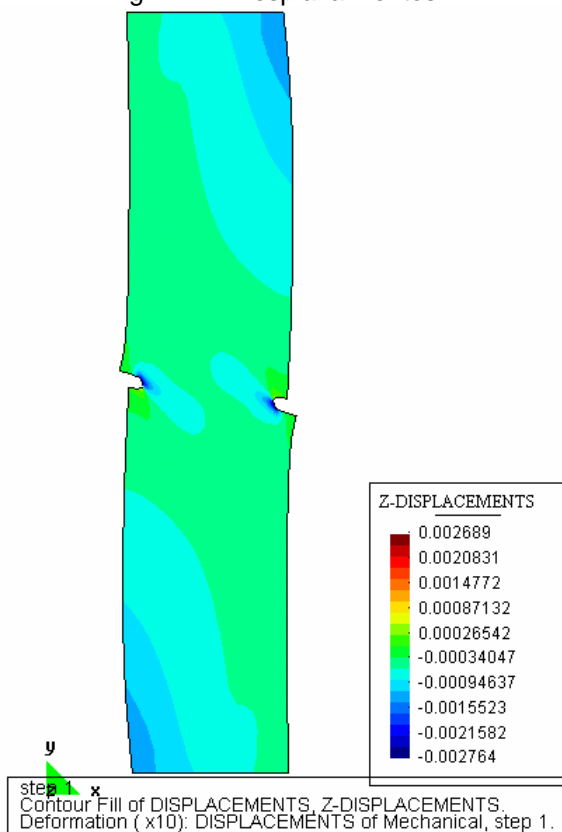


Fig.7.13 – Desplazamientos Z (vista frontal).

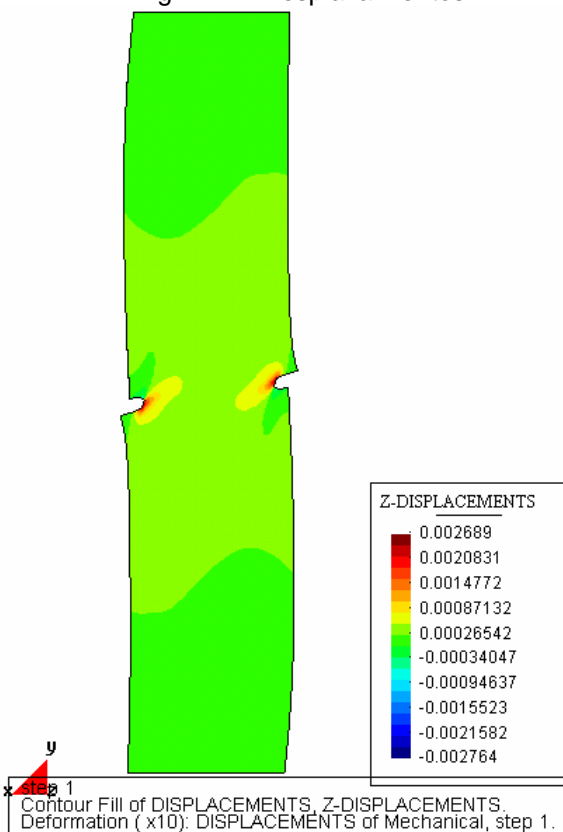


Fig.7.14 – Desplazamientos Z (vista posterior).

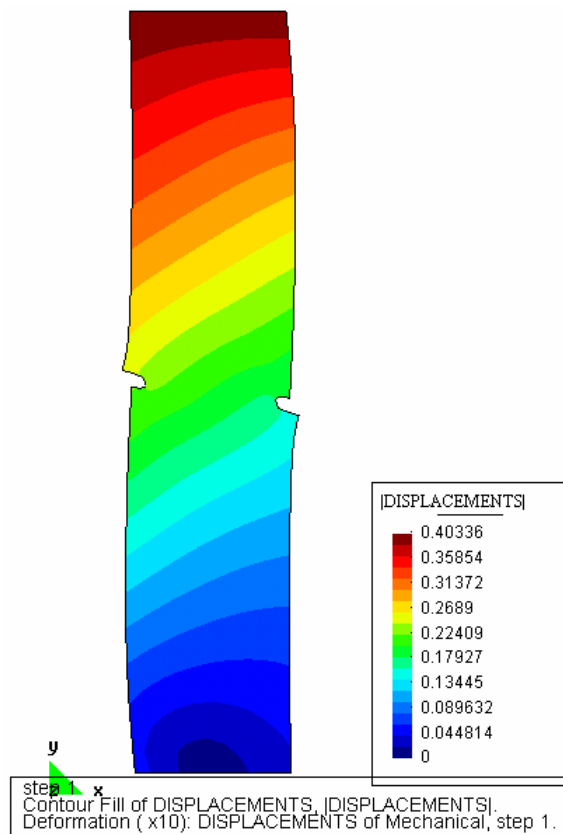


Fig.7.15 – Desplazamientos totales.

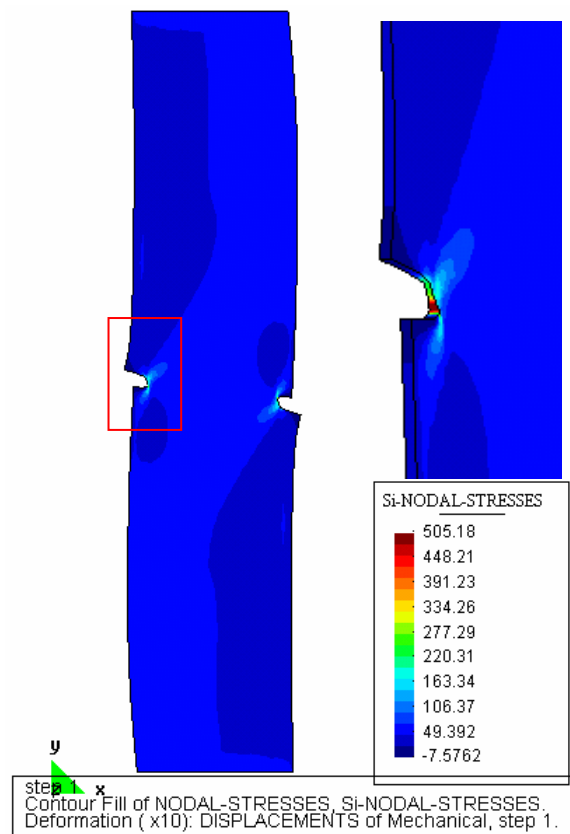


Fig.7.16 – .Tensiones principales i.

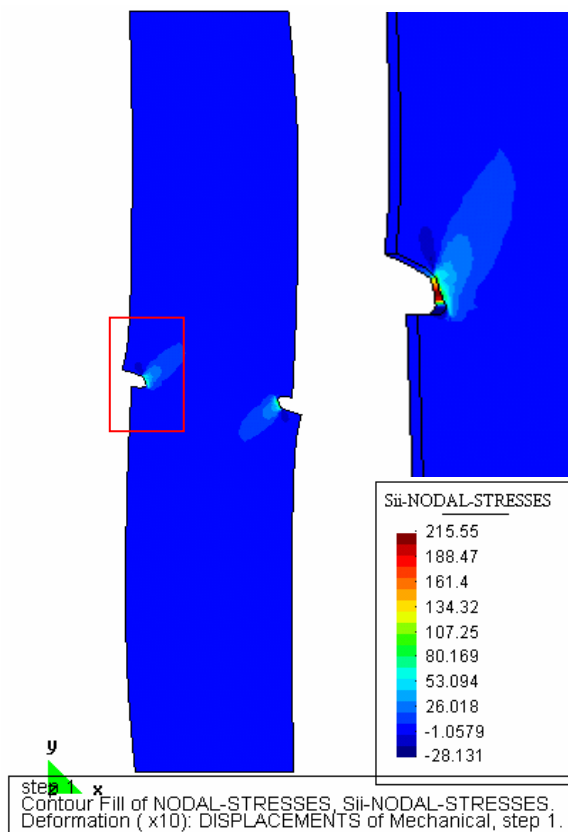


Fig.7.17 – Tensiones principales ii.

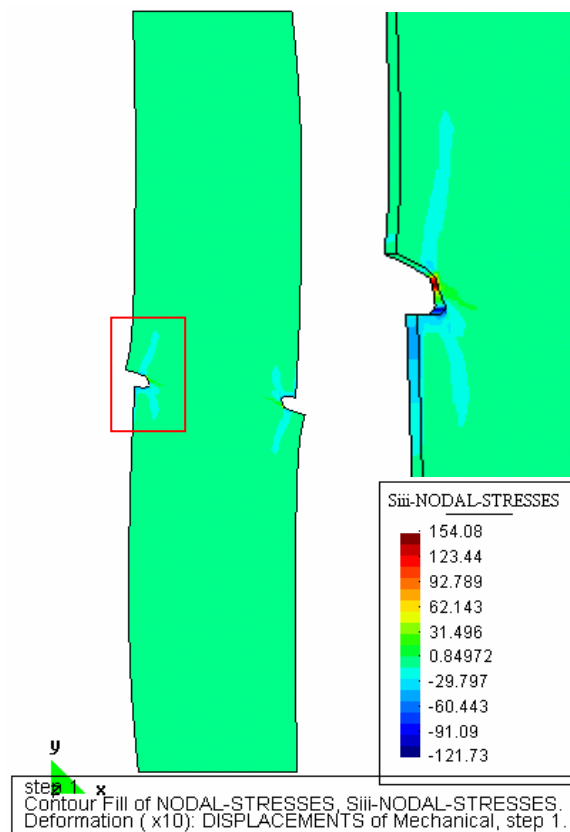


Fig.7.18 – .Tensiones principales iii.



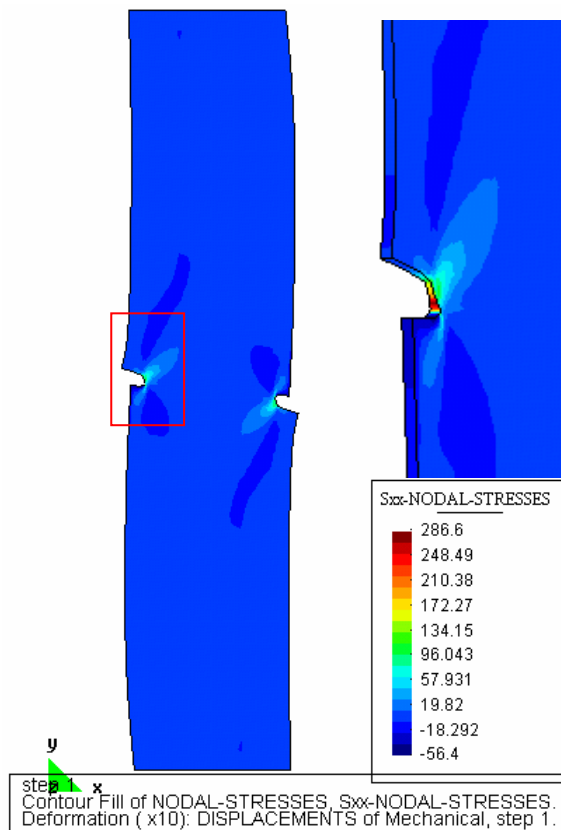


Fig.7.19 – Tensiones normales X.

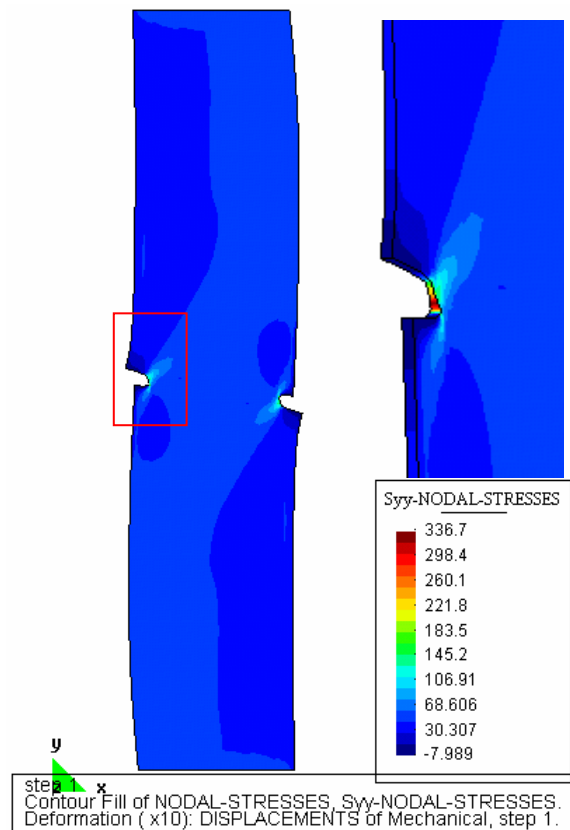


Fig.7.20 – Tensiones normales Y.

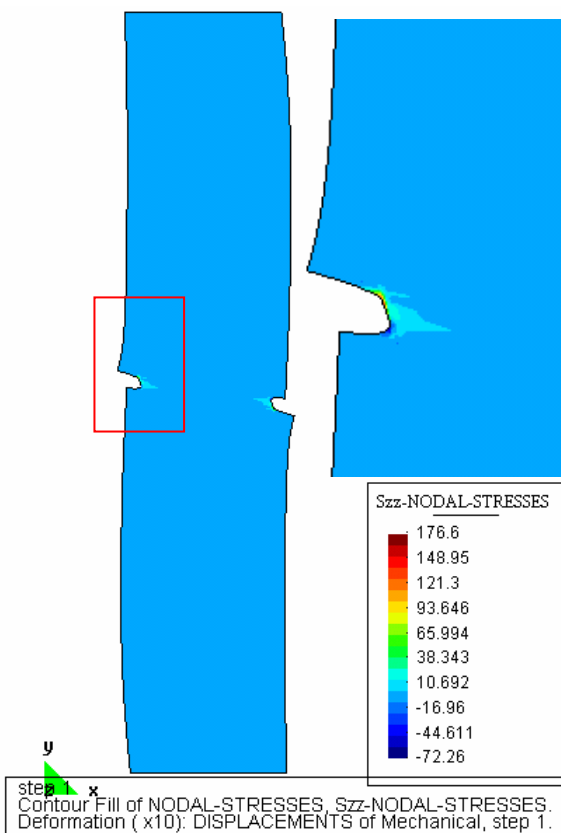


Fig.7.21 – Tensiones normales Z.

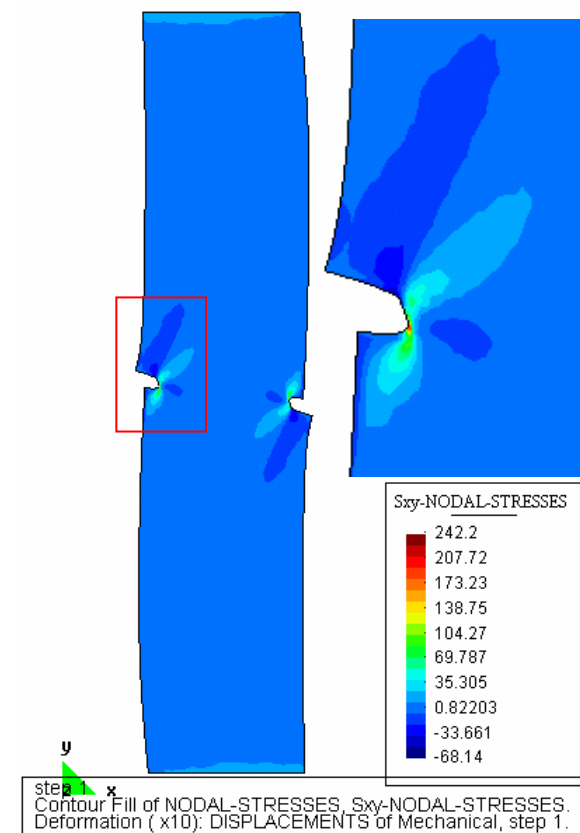


Fig.7.22 – Tensiones tangenciales XY.

## 7.4 Ejemplo de estructura de placas sándwich en “T”

Con el objetivo de estudiar la respuesta mecánica de las antenas utilizadas en satélites espaciales, EADS-CASA diseña, elabora y realiza ensayos de elementos estructurales representativos. Estas estructuras son construidas con materiales compuestos sándwich de pared delgada de laminados reforzados con fibra de carbono y núcleo de nido de abeja de aluminio (*CFRP thin-walled sandwiches with aluminum honeycomb core*).

Se realiza, a continuación, la simulación numérica de una estructura de placas sándwich en “T” sometida a una deformación controlada cuasi-estática. Esta prueba forma parte de la validación estructural realizada en el proyecto europeo COMPASS [1].

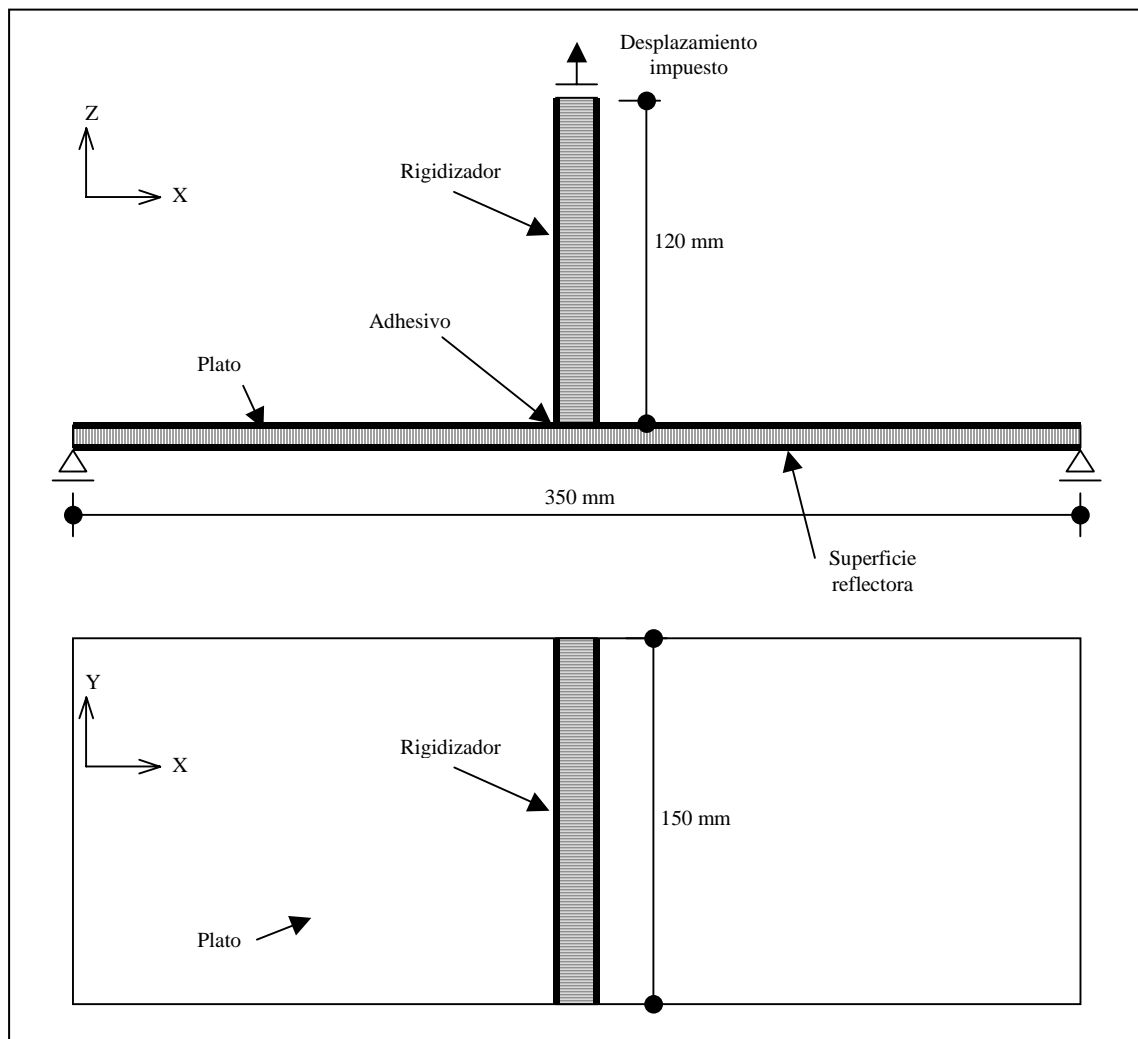


Figura 7.23 – Geometría de la estructura y condiciones de contorno.

### 7.4.1 Descripción geométrica y condiciones de contorno

El componente estructural propuesto es una típica junta utilizada para la construcción de estructuras de antenas. La Figura 7.23 muestra las dimensiones del modelo y condiciones de contorno.

La configuración de laminado y materiales se indican a continuación:

- Configuración del sándwich del plato -horizontal- (ver Figura 7.24):  
 Piel (+60, -60, 0)s / adhesivo / núcleo / adhesivo / piel (0, -60, +60)s  
 Pieles: CYCOM 950-1 / 33% / M55J / 70  
 Espesor de cada lámina = 0.070 mm  
 Núcleo: "Nido de abeja" de aluminio CRIII-5056-1/4-.0007  
 Altura = 6 mm  
 Film adhesivo: BSL-312-UL  
 Espesor = 0.200 mm
- Configuración del sándwich del rigidizador -vertical- (ver Figura 7.24):  
 Piel (+60, -60, 0)s / adhesivo / núcleo / adhesivo / piel (0, -60, +60)s  
 Pieles: CYCOM 950-1 / 33% / M55J / 70  
 Espesor de cada lámina = 0.070 mm  
 Núcleo: "Nido de abeja" de aluminio CRIII-5056-1/4-.0007  
 Altura = 12 mm  
 Film adhesivo: BSL-312-UL  
 Espesor = 0,20 mm
- Unión:  
 Film adhesivo: BSL-312-UL  
 Espesor = 0,20 mm

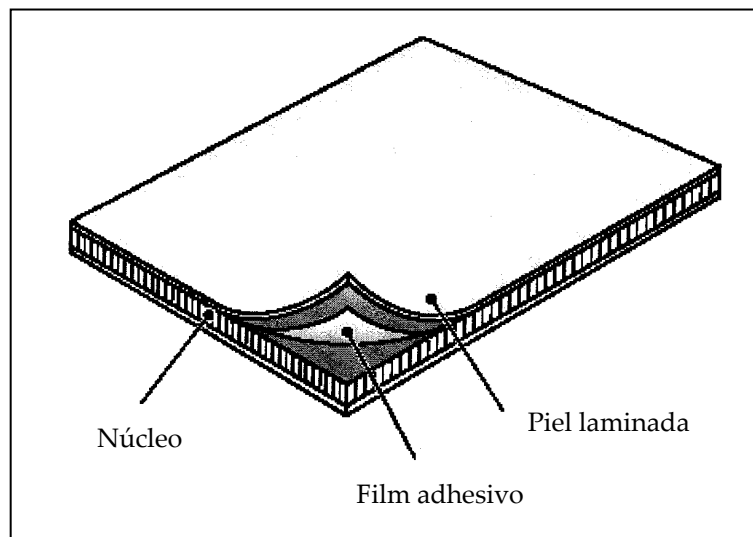


Figura 7.24 – Composición esquemática de un sándwich.

Si bien el problema podría plantearse bidimensionalmente (2D) como un caso de tensión plana, para modelar la geometría se utilizan elementos hexaédricos con el fin de poner a prueba la formulación 3D propuesta. Se emplea un solo elemento finito en el ancho unitario adoptado que es de 10 mm. La discretización del

dominio se realiza con 414 elementos hexaédricos estructurados generados por 960 nodos.

En la Figura 7.25 se muestra un detalle de la malla de elementos finitos utilizada donde cada color diferente indica un tipo distinto de material o alineación. Nótese que los laminados (pieles) son modelados mediante un solo elemento en su espesor, a pesar de contar con varias láminas con diferentes alineaciones. Esto se realiza mediante el empleo de un “elemento compuesto hexaédrico” que combina la formulación de un elemento sólido 3D isoparamétrico con el modelo constitutivo para laminados compuestos propuesto en el capítulo 5. Este tipo de elemento compone la respuesta de los diferentes materiales componentes de cada lámina, obteniendo de esta manera la respuesta del laminado homogeneizado en el interior del elemento finito.

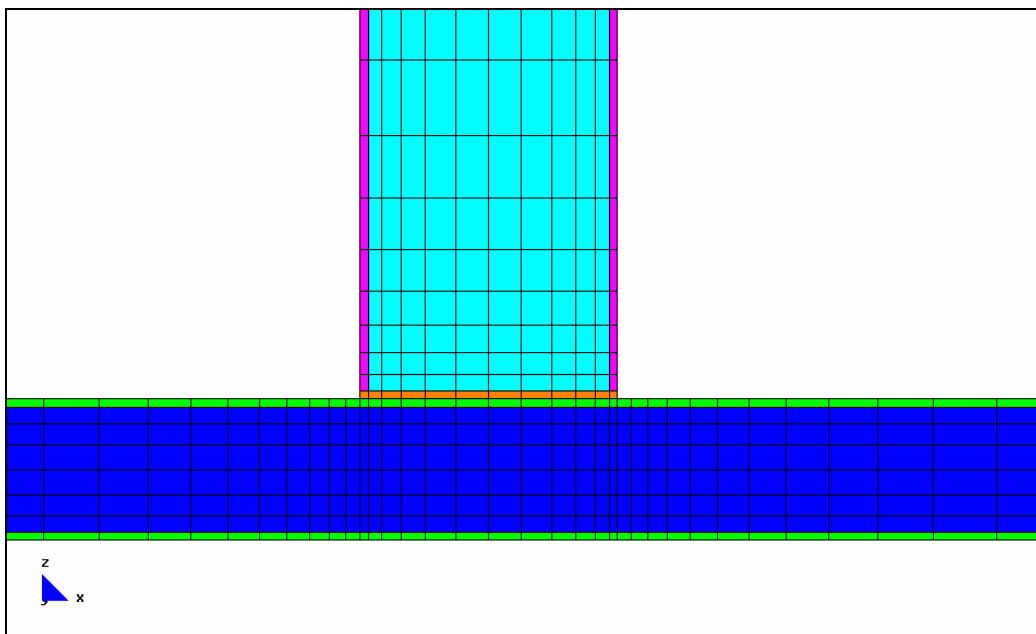


Figura 7.25 – Detalle de la malla de elementos finitos utilizada.

#### 7.4.2 Descripción de materiales

Se indican a continuación las propiedades elásticas y de rotura de los diferentes materiales componentes.

- Fibra de carbono M55J:
 

Diámetro:	0.005 mm
Densidad:	1930 Kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Young long.:	540 GPa
Módulo de Young trans.:	10,8 GPa
Coefficiente de Poisson:	0,22
Resistencia última:	3,92 GPa
Deformación última:	0,7 %
Fabricado por:	Toray Industries Inc. ( <a href="http://www.toray.com">www.toray.com</a> )

- Resina epoxi CYCOM 950-1:

Densidad: 1250 Kg/m<sup>3</sup>  
 Módulo de Young: 4 GPa  
 Coeficiente de Poisson: 0,35  
 Resistencia última: 52,4 MPa  
 Deformación última: 1,5 %  
 Fabricado por: CYTEC Aerospace Ltd. ([www.cytec.com](http://www.cytec.com))

- Núcleo “nido de abeja”:

Nombre: 1/4-5056-0.0007;HON-/26  
 Material: aluminio  
 Densidad: 26 Kg/m<sup>3</sup>  
 Diámetro de celda: 6,4 mm  
 Espesor de celda: 0,018 mm

- Propiedades elásticas (ver Figura 7.26)

(1: dirección de dobléz)  
 (2: dirección de expansión)  
 (3: normal al plano)

$E_1 = E_2 = G_{12}$ : 1. Pa (valor asumido)  
 $E_3$ : 0,207 GPa  
 $\nu_{12}$ : 0,5 (calculado desde la geometría de la celda)  
 $G_{13}$ : 0,138 GPa  
 $G_{23}$ : 0,083 GPa

- Valores de inicio de falla:

Tensión\_comp.\_3: 0.758 MPa  
 Cortante\_13: 0.621 MPa  
 Cortante\_23: 0.414 MPa

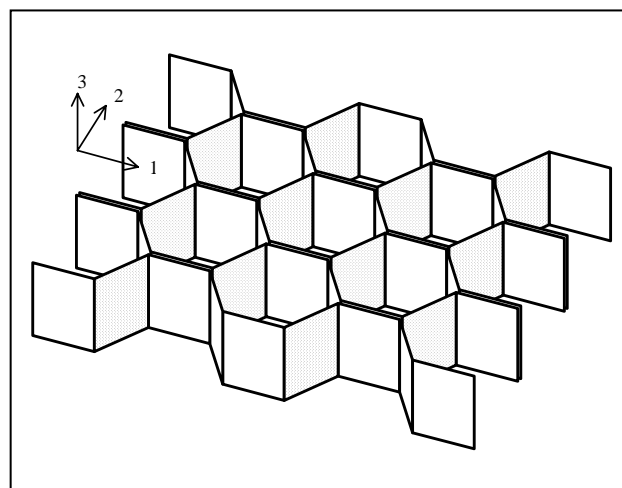


Figura 7.26 – Esquema de un núcleo tipo “nido de abeja”.

### 7.4.3 Simulación numérica

La simulación numérica se efectúa sobre la geometría 3D (descrita anteriormente) tomando los valores mecánicos de los materiales componentes y su morfología dentro del compuesto como entrada de datos.

Fibra y matriz, son modelados numéricamente como materiales elástico ortótropo y elasto-plástico isótropo, respectivamente. Mientras que el núcleo de aluminio se modela como material elástico ortótropo. Se ha supuesto, en este caso, que el adhesivo entre rigidizador y plato posee las mismas propiedades que la matriz.

### 7.4.4 Resultados obtenidos

Una curva típica en este tipo de problema consiste en medir la fuerza generada por la estructura en función del desplazamiento impuesto indicado en la Figura 7.23.

La Figura 7.27 muestra la fuerza que genera la estructura por unidad de longitud de probeta cuyo valor máximo no alcanza los 30 N/mm.

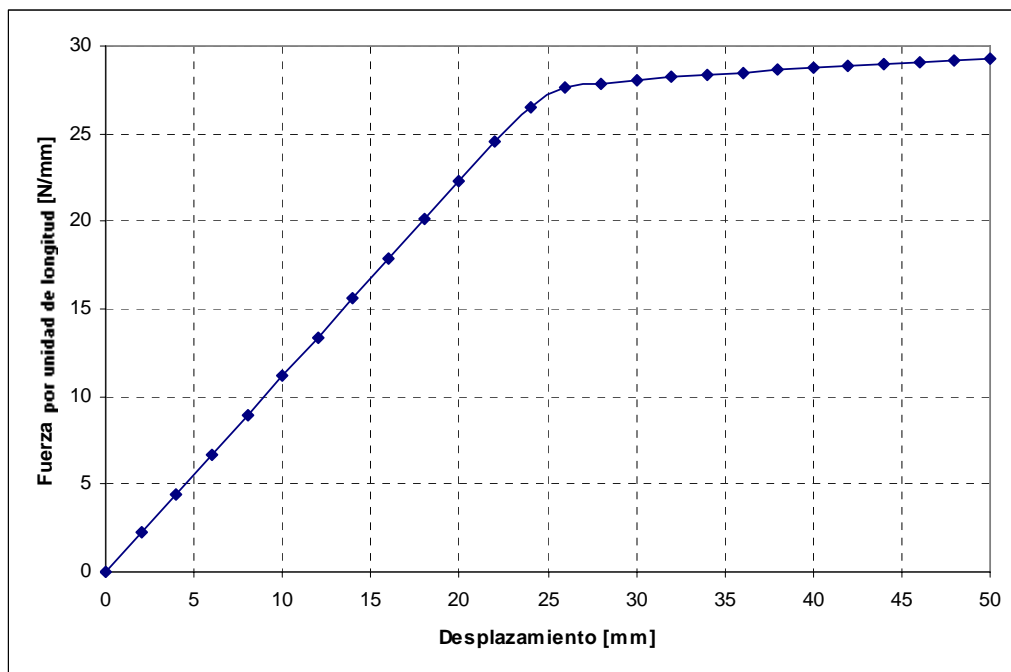


Figura 7.27 – Curva Fuerza-Desplazamiento para una longitud unitaria de probeta.

La Figura 7.28 muestra los valores de desplazamiento totales en la configuración deformada. Se aprecia una deformación máxima alcanzada de 50 mm.

Los valores de las componentes del desplazamiento en las distintas direcciones son ilustrados en Figura 7.29, Figura 7.30, y Figura 7.31.

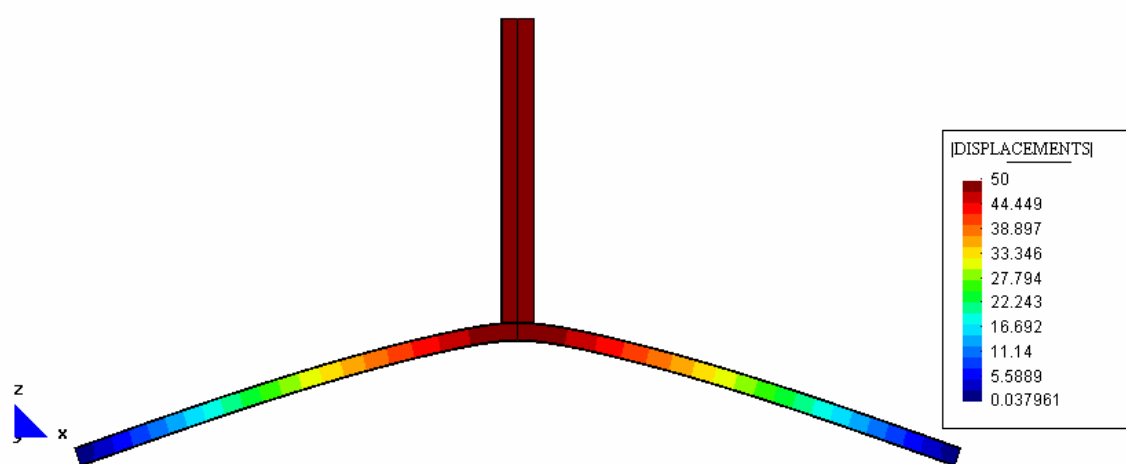


Figura 7.28 – Desplazamientos totales en la configuración deformada.

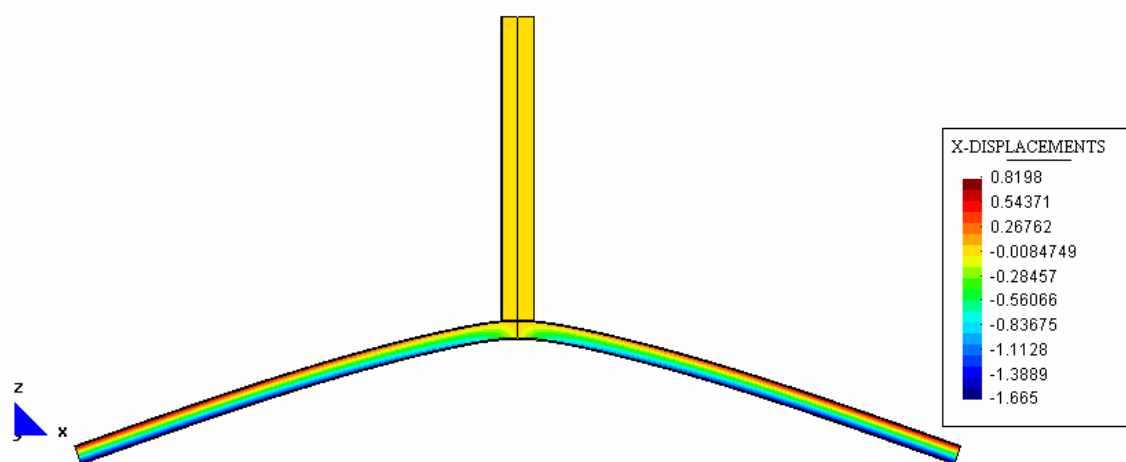


Figura 7.29 – Componente X de desplazamientos.

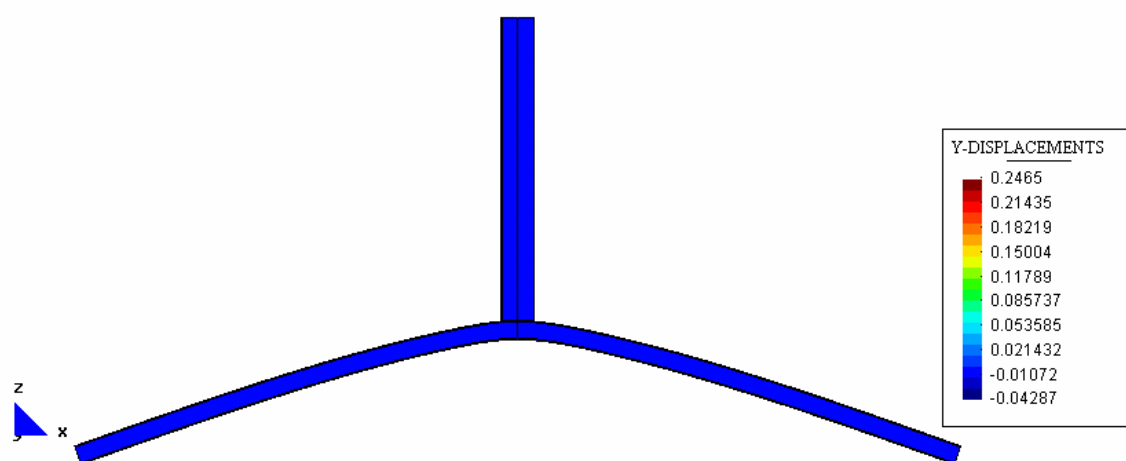


Figura 7.30 – Componente Y de desplazamientos.

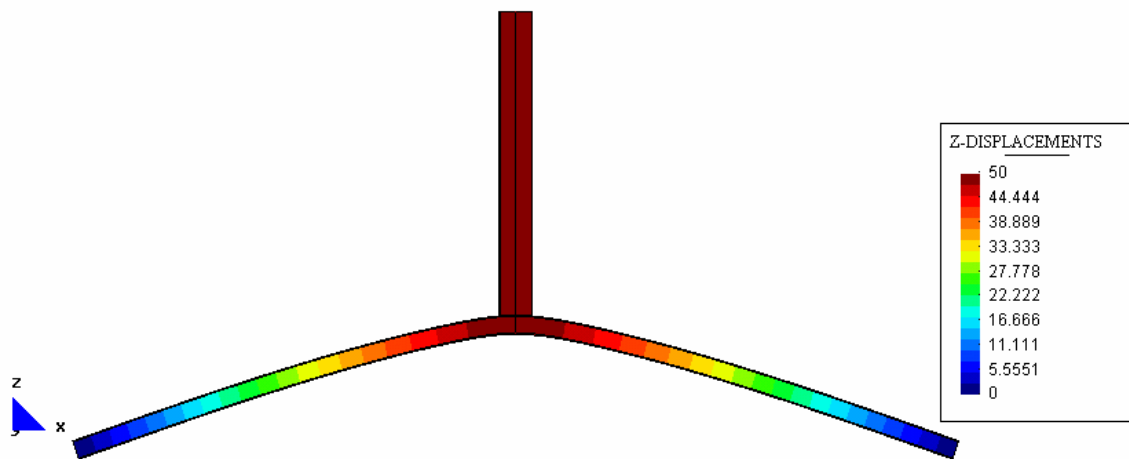


Figura 7.31 – Componente Z de desplazamientos.

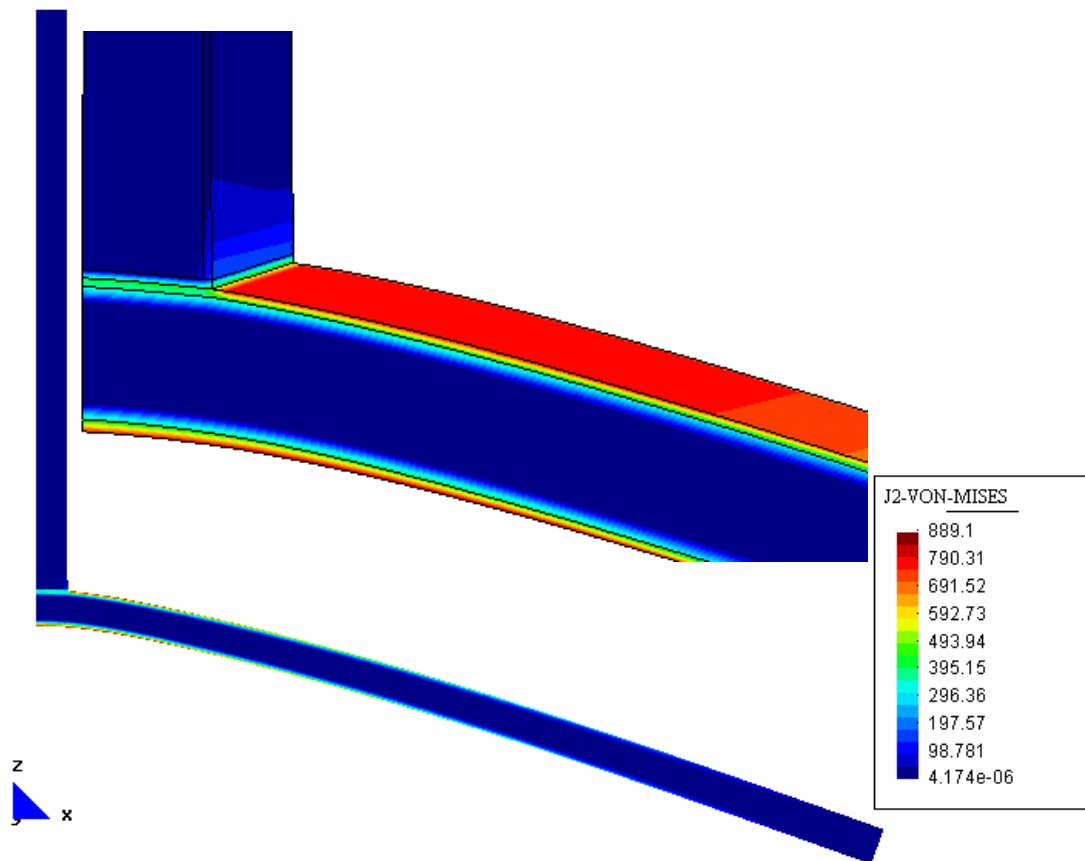


Figura 7.32 – Tensiones de Von Mises en la estructura.



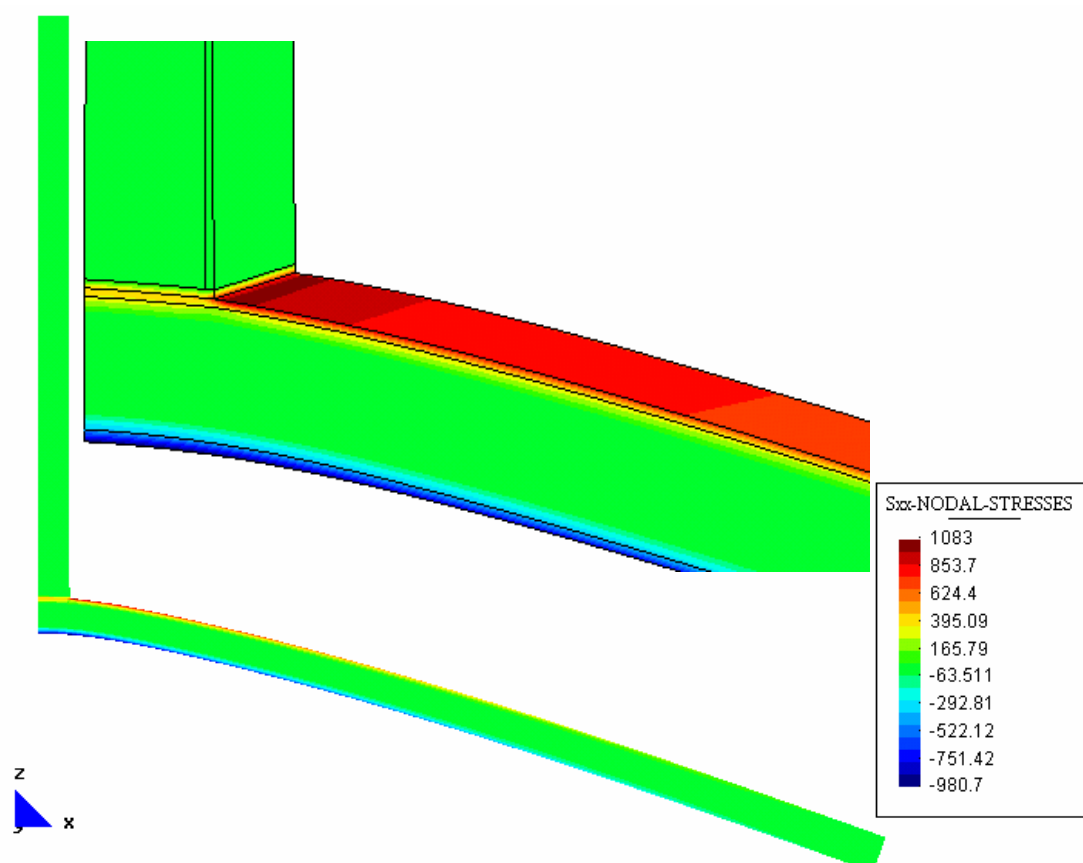


Figura 7.33 – Tensiones de componente X.

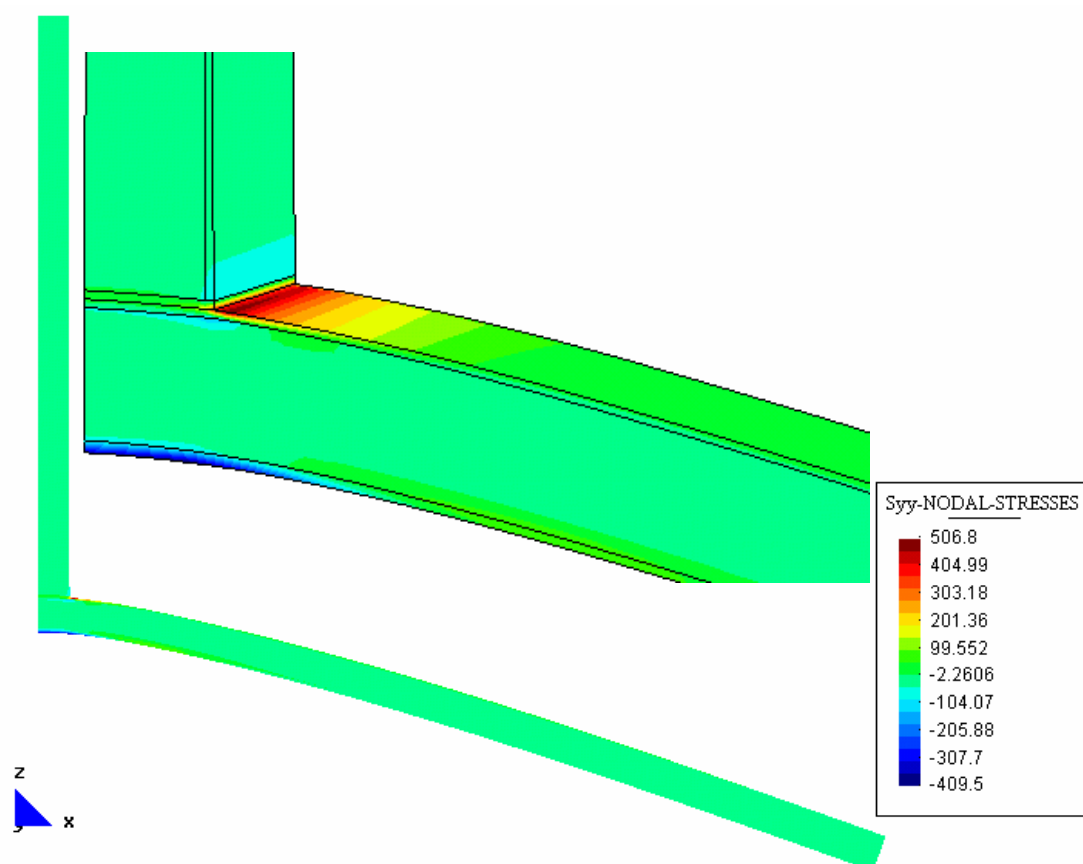


Figura 7.34 – Tensiones de componente Y.

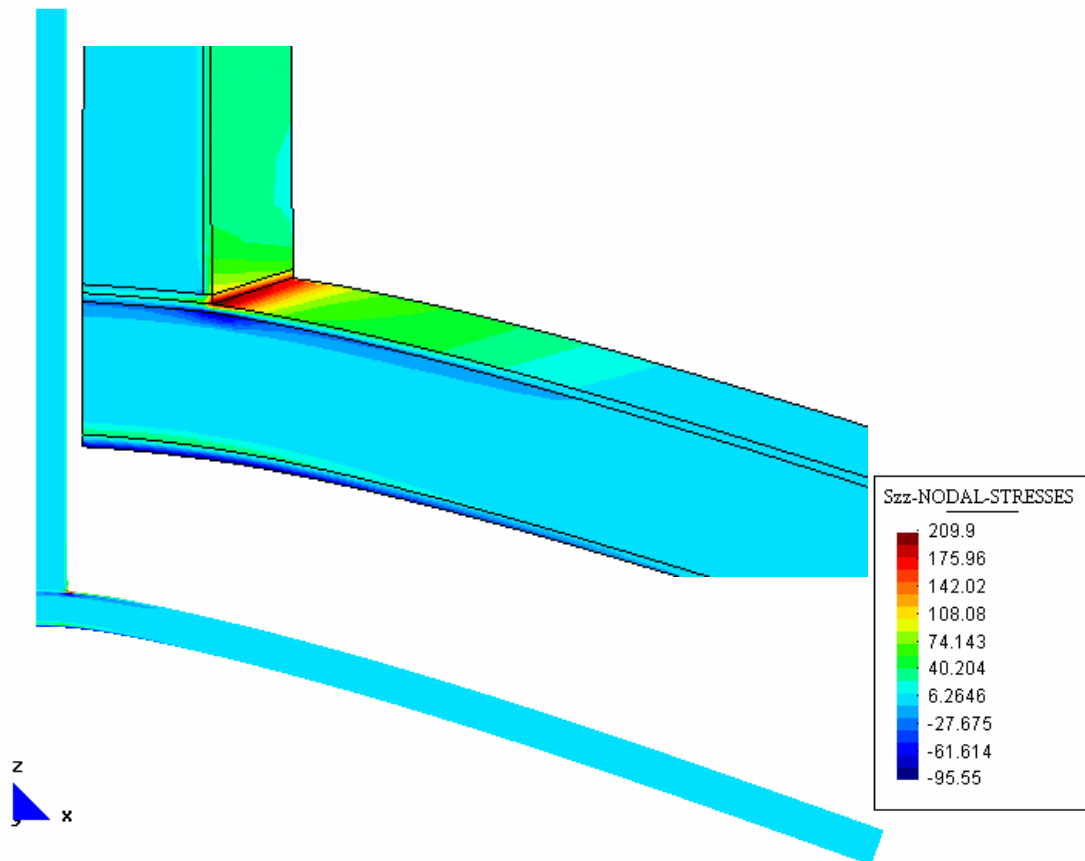


Figura 7.35 – Tensiones de componente Z.

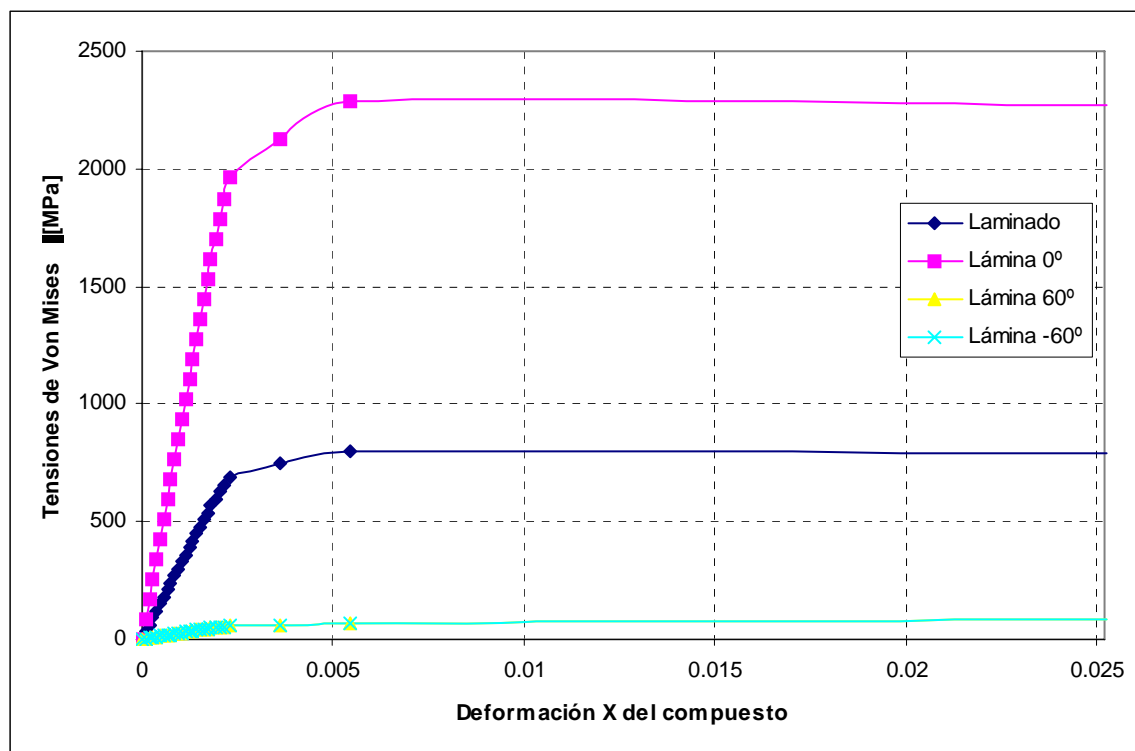


Figura 7.36 – Tensiones de comparación en láminas componentes del laminado.

En la Figura 7.36 se muestran las tensiones de comparación (Von Mises) del laminado y sus láminas componentes en el primer punto de Gauss del elemento finito N° 1 (el más desfavorable). La Figura 7.37 ilustra las tensiones de comparación de fibra y matriz de lámina alineada a 0° (dirección X) en el mismo punto.

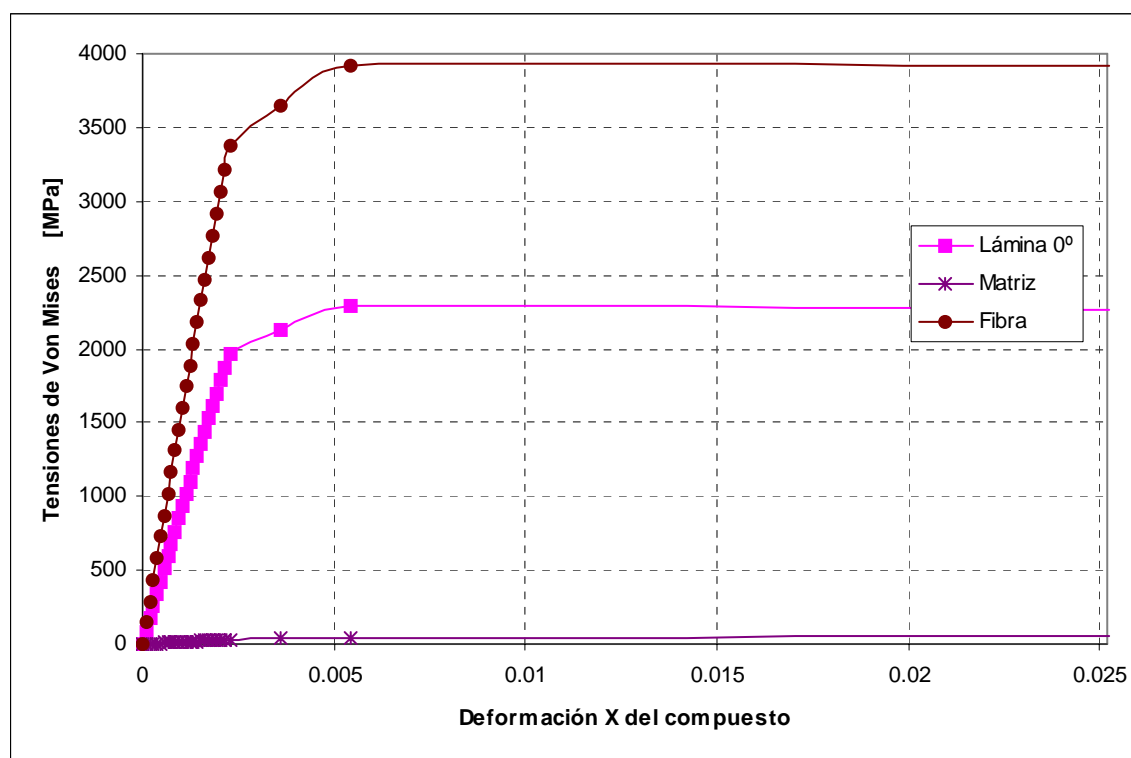


Figura 7.37 – Tensiones de comparación en materiales componentes de la lámina 0°.

## 7.5 Tracción de espécimen Z (elementos lámina DKT laminado)

Mediante un ensayo a tracción de un espécimen Z, tal como puede apreciarse en la Figura 7.38, se estudia indirectamente la respuesta a flexión que se produce en las curvas de esta geometría. Este ensayo ha sido propuesto por ISD a través del proyecto europeo COMPASS [1].

Se muestra a continuación la simulación numérica del espécimen Z laminado sometido a una deformación controlada cuasi-estática. Se utilizan varias configuraciones de laminado compuesto.

### 7.5.1 Descripción geométrica y condiciones de contorno

La Figura 7.38 muestra las dimensiones de la sección del espécimen modelado, cuyo ancho es de 70 mm.

Las configuraciones de laminado simuladas son las siguientes:  $[0,90]_s$ ;  $[45,-45]_s$ ;  $[0,90,45,-45]_s$  considerando una distribución homogénea a lo largo del espesor. Cada lámina está constituida por matriz epoxi reforzada con fibras de carbono. Las propiedades de los materiales componentes son las empleadas en el ejemplo de la sección 7.1.

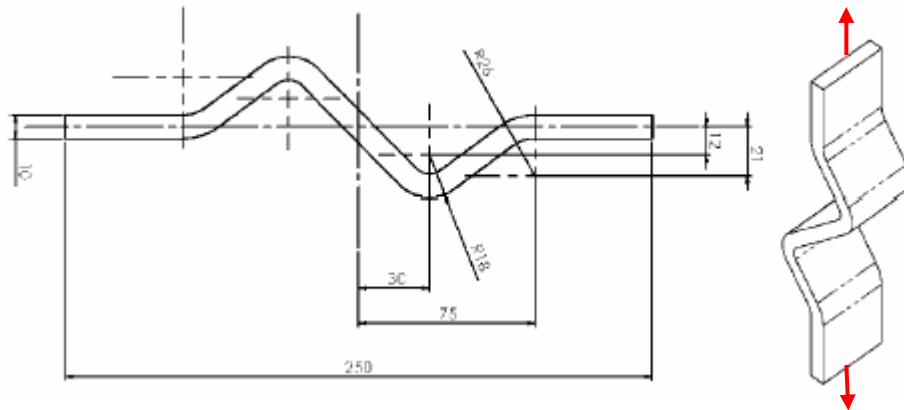


Figura 7.38 – Descripción geométrica del espécimen Z.

### 7.5.2 Simulación numérica

Fibra y matriz, son modelados numéricamente como materiales elástico ortótropo y elasto-plástico isótropo, respectivamente.

La geometría 3D se discretiza con elementos del tipo lámina DKT laminado. Este tipo de elemento es el que se desarrolla y propone en el capítulo 5, el cual emplea, en cada una de sus capas, el modelo constitutivo propuesto para compuestos (desarrollado en el capítulo 4).

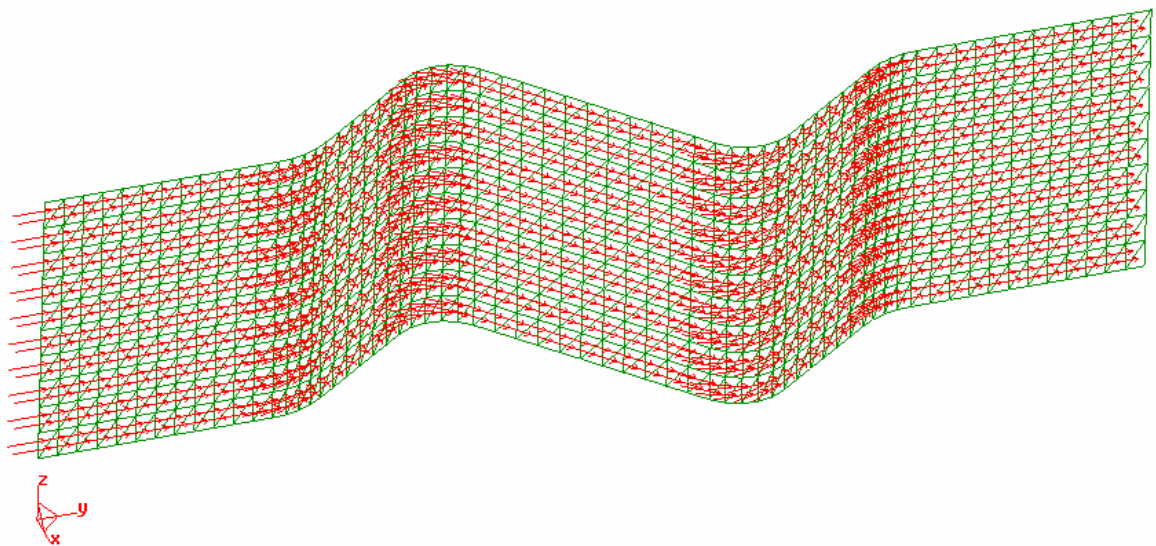


Figura 7.39 – Dirección local del material y malla de elementos lámina utilizada.

La Figura 7.39 muestra la dirección local del material para cada elemento de la malla. Esta dirección permite definir la orientación correcta del sistema de ejes locales del material.

### 7.5.3 Resultados obtenidos

Los resultados de este ejemplo muestran la respuesta cualitativa del espécimen Z cuando se utilizan diferentes configuraciones de laminado. Permite estudiar la influencia de la orientación del laminado en la distribución y concentración de momentos flectores.

Las figuras siguientes ilustran la distribución de los momentos flectores principales correspondientes a las distintas configuraciones de laminado:  $[0,90]_s$ ;  $[45,-45]_s$ ;  $[0,90,45,-45]_s$ . Los colores indican el cambio de signo en los momentos flectores.

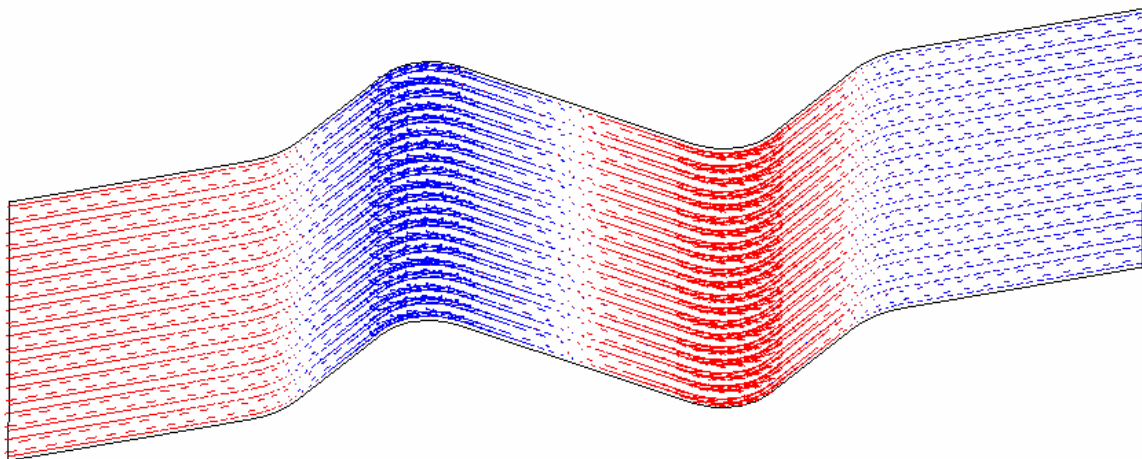


Figura 7.40 – Momentos flectores principales para el laminado  $[0,90]_s$ .

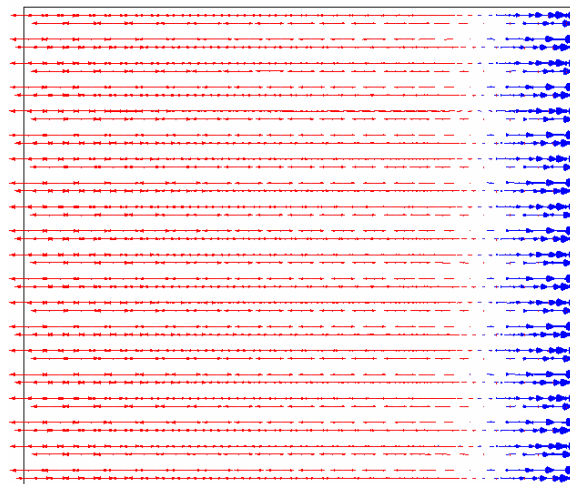


Figura 7.41 – Detalle de momentos flectores principales para el laminado  $[0,90]_s$ .

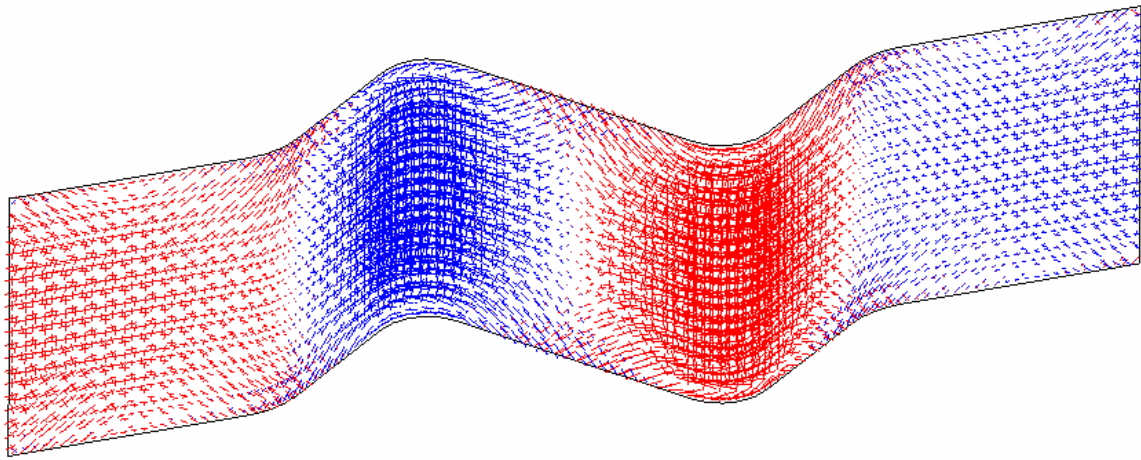


Figura 7.42 – Momentos flectores principales para el laminado [45,-45]s.

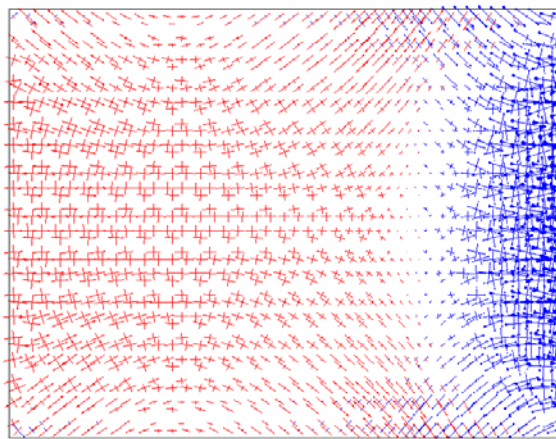


Figura 7.43 – Detalle de momentos flectores principales para el laminado [45,-45]s.

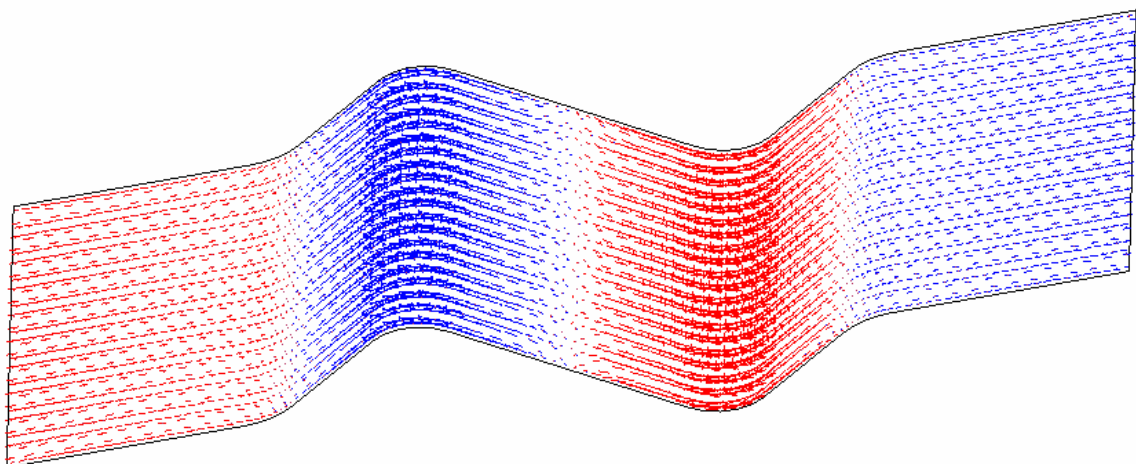


Figura 7.44 – Momentos flectores principales para el laminado [0,90,45,-45]s.



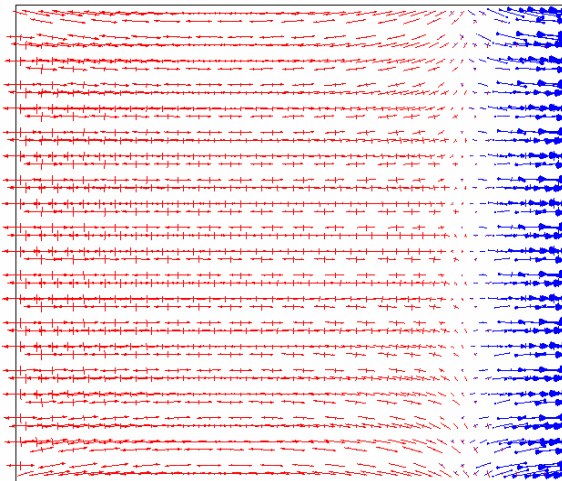


Figura 7.45 – Detalle de momentos flectores principales para el laminado [0,90,45,-45]s.

## 7.6 Subsistema estructural: Unión de tubos.

El componente considerado es un subsistema de la estructura tubular de un coche prototipo denominado "Touareg" diseñado por Italdesign-Giugiaro, constituido por una unión de material compuesto que liga dos tubos de acero (ver Figura 7.46). Esta unión había sido diseñada originalmente también en acero, pero se pretende estudiar la posibilidad de realizarla en material compuesto.

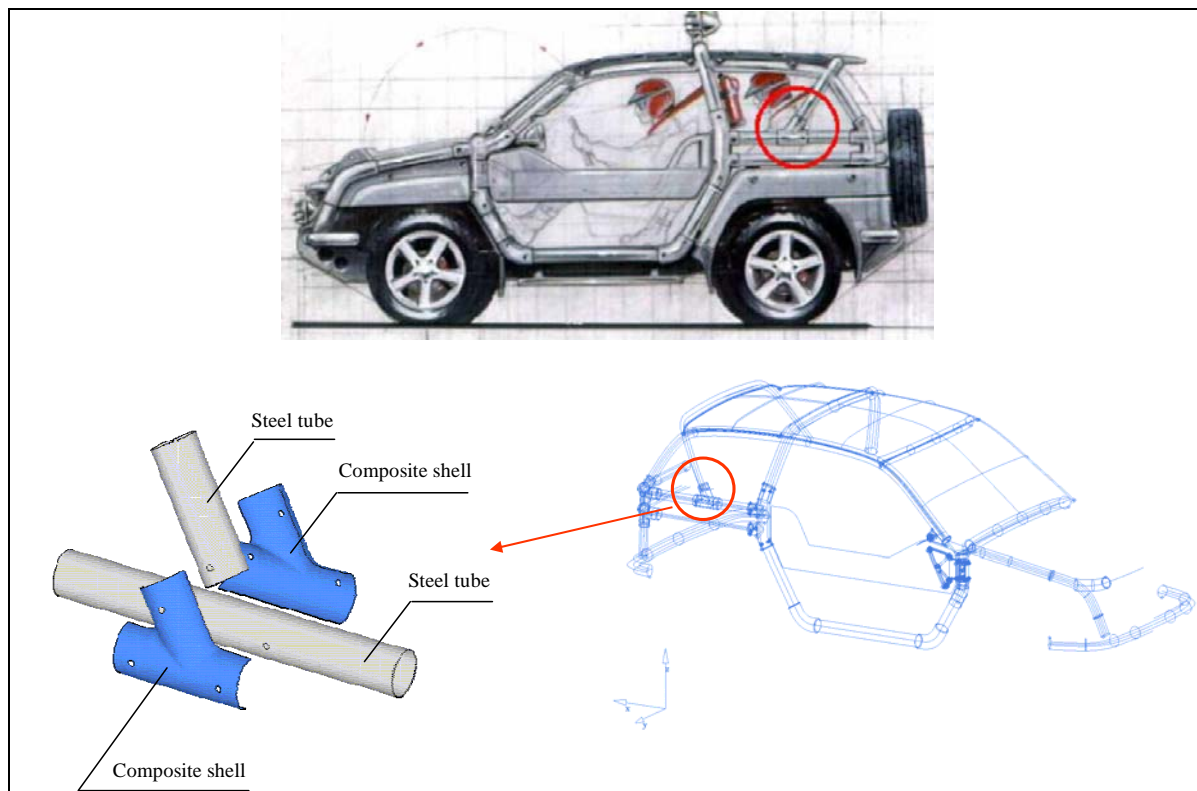


Figura 7.46 – Subsistema de la estructura tubular del coche prototipo "Touareg".





La configuración de laminado y materiales se indican a continuación:

Láminas con un refuerzo de fibras del 55% en peso:

(A) CBX 400	Carbono 100%	-45°/+45° biaxial	400 g m <sup>-2</sup>	0.45 mm
(B) CEBX 180	Híbrido Vidrio-E / Carbono	-45°/+45° biaxial	180 g m <sup>-2</sup>	0.20 mm
(C) EBX 400	Vidrio-E	-45°/+45° biaxial	400 g m <sup>-2</sup>	0.43 mm
Apilado del laminado: A / B / C / B / C // C / B / C / B / A				Espesor total: 3.42 mm

Considerando las diferentes orientaciones y tipos de fibra, se pueden establecer 28 capas constituyentes del laminado total (indicadas en tabla 5.1). Sin embargo, para disminuir el costo computacional, se pueden definir menor número de capas (8 ó 12) empleando laminados equivalentes como los descritos en el capítulo 5. Para la simulación numérica que se presenta a continuación se emplea el laminado equivalente de 8 capas (4 capas más sus respectivas simétricas) detallado en la tabla 5.2. del capítulo 5.

Se indican a continuación las propiedades elásticas y de rotura de los diferentes materiales componentes.

- Resina epoxi: Bakelite Rütapox VE 4434:  
 Densidad: 1092 Kg/m<sup>3</sup>  
 Módulo de Young: 4 GPa  
 Coeficiente de Poisson: 0,35  
 Resistencia última: 75 MPa  
 Deformación última: 6 %
- Fibra de carbono (High modulus): Tenax HTA 5241  
 Densidad: 1770 Kg/m<sup>3</sup>  
 Módulo de Young long.: 238 GPa  
 Módulo de Young trans.: 28 GPa  
 Coeficiente de Poisson: 0,23  
 Resistencia última: 3950 MPa  
 Deformación última: 1,7 %
- Fibra de vidrio-E:  
 Densidad: 2600 Kg/m<sup>3</sup>  
 Módulo de Young: 80 GPa  
 Coeficiente de Poisson: 0,22  
 Resistencia última: 2450 MPa  
 Deformación última: 4,8 %

## 7.6.2 Descripción geométrica y condiciones de contorno

La discretización del dominio, mostrada en la Figura 7.50, se realiza con 5197 nodos y 10076 elementos finitos tipo lámina DKT (de tres nodos con tres puntos de Gauss). En los tubos de acero (verde) se emplean elementos tipo lámina simples, y en la unión de material compuesto (celeste), los laminados.

Se restringieron los desplazamientos de los extremos del tubo más largo. Sobre el tubo más corto se aplica un desplazamiento controlado en la dirección “Y” en un

punto exterior el tubo coincidente con el centro de la esfera de acero (ver Figura 7.49). La unión de compuesto es vinculada a los tubos mediante elementos tipo lámina rígidos en las zonas correspondientes a las uniones atornilladas. Se considera el contacto normal existente entre las superficies mediante una formulación de penalización disponible en el código FEM empleado (COMET) para representar este fenómeno.

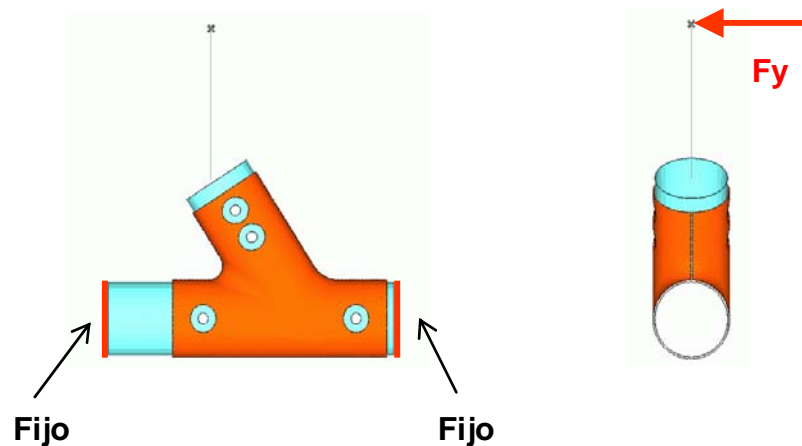


Figura 7.49 – Condiciones de contorno.

En la Figura 7.50, se muestra la malla de elementos finitos utilizada donde cada color diferente indica un tipo distinto de material.

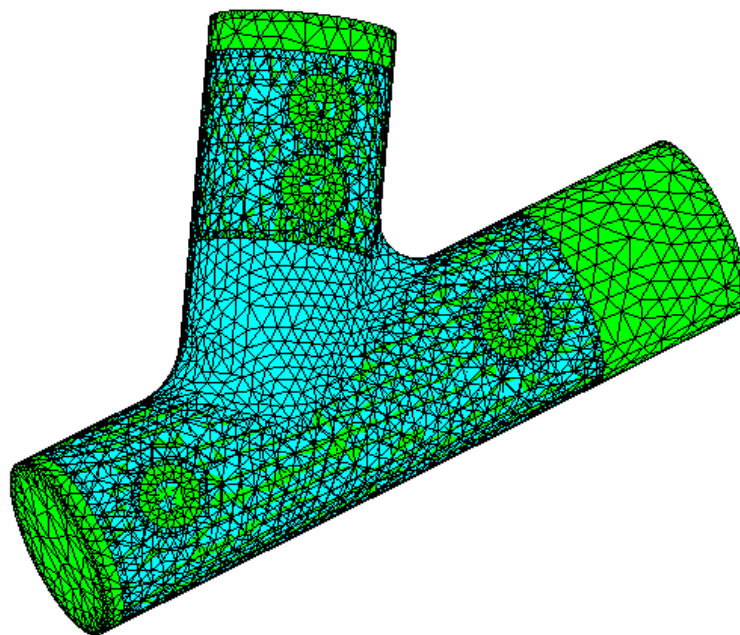


Figura 7.50 – Detalle de la malla de elementos finitos utilizada para discretizar la unión de tubos.

### 7.6.3 Simulación numérica

La simulación numérica se efectúa sobre la geometría 3D descrita anteriormente tomando los valores mecánicos de los materiales componentes y su morfología dentro del compuesto (orientación de fibras, fracciones volumétricas, espesores y posiciones de capas, etc.) como entrada de datos.

Las fibras de vidrio y de carbono, son modeladas numéricamente como materiales elástico isótropo y ortótropo, respectivamente. Se emplea un modelo elasto-plástico isótropo para el material matriz.

### 7.6.4 Resultados obtenidos

Tanto en el ensayo experimental como en la simulación numérica, se mide la fuerza generada por la estructura en función del desplazamiento impuesto con dirección “Y” en el punto indicado en la Figura 7.49.

Los ensayos experimentales han sido realizados por el Departamento de Mecánica de la II Facultad de Ingeniería del *Politecnico di Torino* (Italia) bajo la supervisión de la Ing. María Pía Cavatorta y del Prof. Giovanni Belingardi.

En las fotos de la Figura 7.51 se ilustra la probeta en sus configuraciones inicial y dañada. Se aprecia una separación notable de las partes que constituyen la unión de material compuesto. El informe experimental indica que el colapso estructural sobreviene al dañarse la parte sometida a compresión, en la cual se observan zonas dañadas (ver Figura 7.52) originadas probablemente por fenómenos de pandeo local de fibras y delaminación.

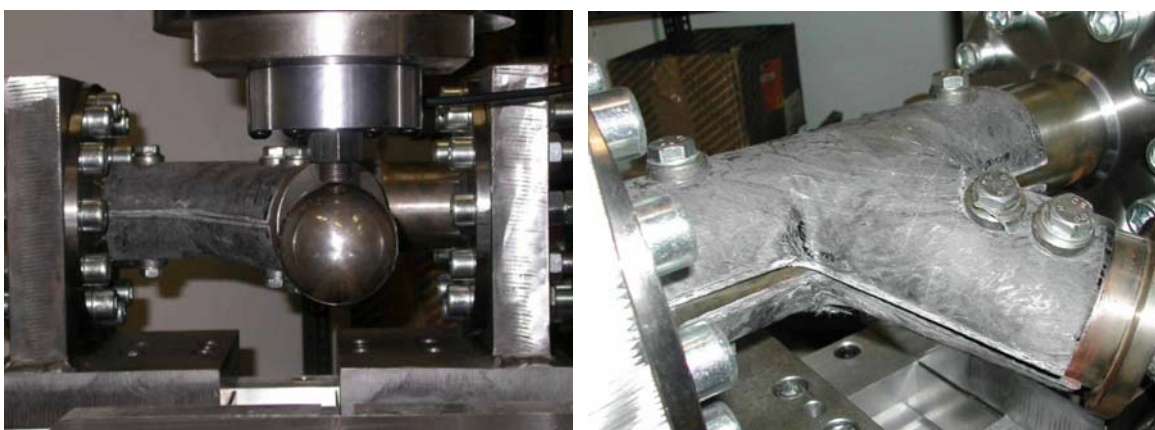


Figura 7.51 – Probeta inicial y dañada.



Figura 7.52 – Parte sometida a compresión. Identificación de zonas dañadas.

En la Figura 7.53 se muestran los vectores desplazamiento sobre la geometría inicial. Nótese que en la simulación numérica se emplea una sección cerrada para modelar la unión de compuesto mientras que en el ensayo experimental la misma está constituida de dos partes separadas. Esta simplificación se realiza con el objetivo de facilitar la definición del contacto entre superficies. La consideración de dos partes, requeriría tener en cuenta el contacto entre ellas además de los contactos con los tubos de acero. Evidentemente, esta simplificación implicará un comportamiento más rígido.

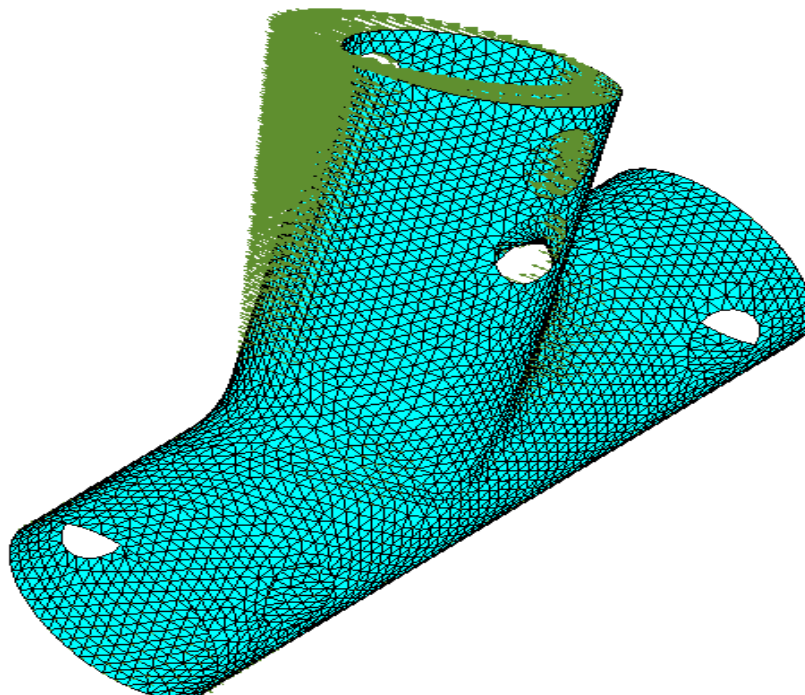


Figura 7.53 – Vectores desplazamiento en la geometría inicial.

Una primera simulación numérica se realiza escogiendo, para cada material componente, un modelo elasto-plástico iso-resistente. La comparación entre la respuesta numérica y las experimentales de las curvas fuerza-desplazamiento se

realiza en la Figura 7.54. La rigidez inicial de la estructura y la resistencia última proporcionada numéricamente está en muy buen acuerdo con los resultados experimentales. Sin embargo, la deformación última y la rigidez estructural final presentan discrepancias probablemente por el hecho, anteriormente mencionado, de emplearse una geometría de superficie cerrada para discretizar la unión de compuesto, además de la consideración de fibras iso-resistentes.

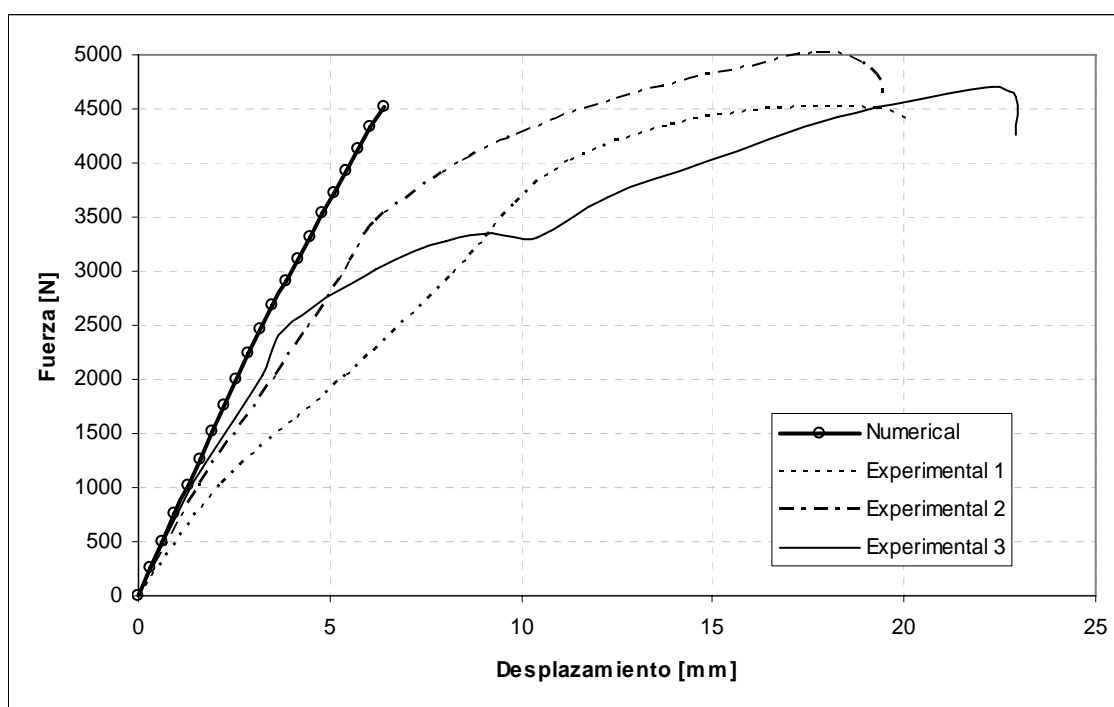


Figura 7.54 – Curva fuerza-desplazamiento en la dirección “Y” de la unión de tubos. Comparación entre resultados experimentales y numérico considerando fibras iso-resistentes.

Una segunda simulación, se realiza considerando que tanto las fibras de carbono como las de vidrio tienen una resistencia a compresión disminuida para considerar el fenómeno de micro-pandeo, tal como se ha indicado en el capítulo de validación y calibración (apartado 6.6.4). De esta manera se pretende reproducir el efecto del pandeo de fibras mediante la transferencia del fenómeno cinemático al modelo constitutivo de cada material componente. La Figura 7.55 muestra la comparación entre los resultados experimentales y la respuesta numérica mediante la consideración de modelos constitutivos no iso-resistentes para las fibras. En este caso la respuesta numérica continúa siendo la más rígida pero se consigue un mejor comportamiento en la rigidez degradada de la estructura.

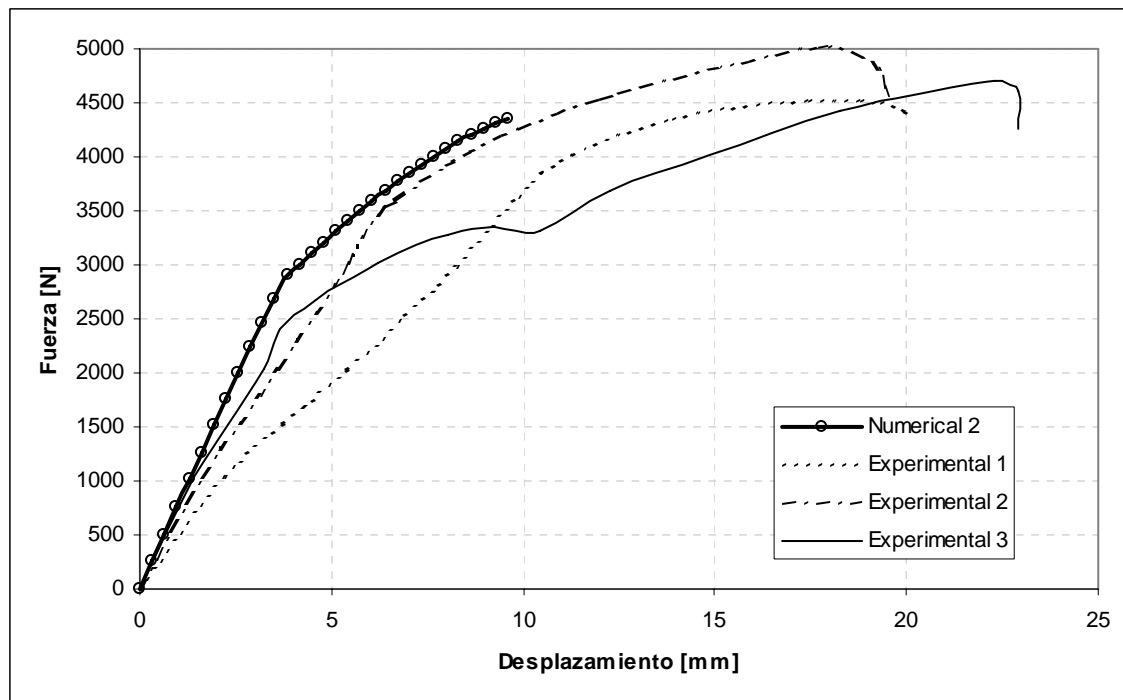


Figura 7.55 – Curva fuerza-desplazamiento en la dirección “Y” de la unión de tubos. Comparación entre resultados experimentales y numérico considerando fibras con resistencia de compresión disminuida para considerar el pandeo local.

Un estudio posterior que mejore la respuesta numérica tendría que considerar las dos partes de la unión de compuesto y el contacto entre ellas. Además, se esperaría una mejora en la predicción numérica si se incluyeran, en la formulación del material compuesto, fenómenos de delaminación y micro pandeo (pandeo local de fibras) que considere cinemáticamente su interacción con la matriz y el estado tensional transversal.

## Referencias

- [1] Growth Project COMPASS (G5RD-CT-2001-00575): A Methodology for Durability Assessment of Composite Materials and Structures under Cyclic Loads. Enero 2001 – Diciembre 2004.
- [2] Cervera M, Agelet C, Chiumenti M. (2002). COMET: Coupled Mechanical and Thermal Analysis. Data input manual. *Technical Report CIMNE N° IT-308*. Barcelona.
- [3] Luccioni B, Oller S. (2002). Modelo de daño direccionado para materiales anisótropos. *AMCA- Mecánica Computacional*. Vol. XXI, 739-754.
- [4] Luccioni B, Oller S. (2003). A directional damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 192, iss. 9, 1119-1145.
- [5] Besson J, Cailletaud G, Chaboche JL, Forest S. (2001). *Mécanique non Linéaire des Matériaux*. Paris: Hermes Science Europe Ltd.
- [6] Simo C, Ju J. (1987). Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Parts I and II. *Int. J. Solids Structures*. Vol. 23, 821-840, 841-869.
- [7] Luccioni B, Oller S, Danesi R. (1996). Coupled Plastic-Damaged Model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Vol. 129, 81-89.
- [8] Faria R, Oliver J, Cervera M. (1998). A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. *Int. J. of Solids and Structures*. Vol. 35, No.14, 1533-1558.
- [9] Car E. (2000). *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. [Tesis doctoral].

## 8 CONCLUSIONES

### 8.1 Conclusiones

**a) Se propone un enfoque general, denominado “composición de comportamientos”, que permite abordar la simulación numérica de la respuesta no-lineal constitutiva de los materiales compuestos bifásicos en general.**

Para tener en cuenta la morfología del compuesto, es decir la estructura interna que forman los componentes, se debe adoptar un conjunto de “ecuaciones de cierre” adecuadas incluyendo una hipótesis de “descomposición” de los campos de tensión y deformación en sus “partes serie y paralelo”.

La denominada “descomposición serie-paralelo” permite definir e identificar las componentes del tensor de tensiones y de deformaciones que intervendrán tanto en las direcciones “serie” como en las “paralelo”; entendiéndose por direcciones “serie” o “paralelo” a aquellas en las que las fases del material compuesto se comportan esquemáticamente como muelles dispuestos en serie o paralelo, respectivamente. En el presente trabajo se propone una definición para el caso particular de fibras largas.

La adopción de “ecuaciones de cierre” específicas permite establecer la compatibilidad de deformación y el equilibrio tensional entre las fases componentes. Estas ecuaciones podrán ser más o menos complejas de acuerdo al fenómeno que se quiera representar, e incluso podrían evolucionar en el tiempo.



En futuros desarrollos podrían incluirse fenómenos de despegue fibra-matriz o pandeo local de fibra mediante la definición apropiada de las mismas, agregando incluso variables internas propias para simular la degradación de la interfaz entre fibra y matriz. En este trabajo, se considera una adhesión perfecta entre componentes y no se contempla inestabilidad en la fibra por lo tanto las “ecuaciones de cierre” no son evolutivas. Se emplean primero las ecuaciones más sencillas posibles que resultan de considerar iso-deformación en la dirección de las fibras e iso-tensión en direcciones ortogonales (modelo Básico Serie-Paralelo); y posteriormente se proponen otras ecuaciones de cierre (modelo Enriquecido Serie-Paralelo) que enriquecen el comportamiento transversal mediante una reconsideración del estado de deformación y de tensiones en direcciones serie, más apropiado a la morfología 3D.

Se propone un algoritmo general de resolución para el material compuesto que emplea, como “cajas negras”, los modelos constitutivos no-lineales de los materiales componentes previamente desarrollados por otros autores. Esta metodología permite aprovechar los modelos actualmente disponibles que mejor modelan y caracterizan el material componente homogéneo. De esta manera se consigue una transferencia de tecnología hacia los materiales compuestos. Además, el algoritmo propuesto presenta una convergencia interna veloz y proporciona el operador tangente algorítmico que permite lograr una rápida convergencia también en el problema global. Ambas convergencias son cuadráticas cuando los modelos de los componentes proveen su propia matriz constitutiva tangente.

El modelo propuesto, tanto en su versión básica (BSP) como en la enriquecida (ESP) define el comportamiento de una lámina. Se combina con la teoría clásica de la laminación para describir laminados formados por capas unidireccionales de refuerzo continuo. Su relativa simplicidad y la eficacia numérica resultante hacen que el enfoque propuesto sea apropiado para ser implementado como modelo material en programas FEM para estudiar la degradación mecánica de estructuras o componentes hechos de laminados compuestos de fibra larga. La desventaja inicial de la subestimación de la rigidez transversal y de cortante, es posteriormente superada con el modelo enriquecido SP.

**b) Se ha realizado la validación del modelo para compuestos propuesto y se ha indicado el proceso de calibración en función de los datos disponibles de lámina y materiales componentes.**

Para su validación, el modelo numérico propuesto ha sido contrastado con resultados experimentales y teóricos disponibles en la literatura, y con ensayos realizados en laboratorio sobre probetas laminadas a través del proyecto europeo COMPASS [1]. También se ha verificado el cumplimiento de las ecuaciones de

cierre analizando la degradación del compuesto y de los componentes frente a procesos de carga y descarga cuasi-estáticas.

Para el proceso de validación se han empleado tanto materiales ficticios como reales, empleándose distintos modelos constitutivos homogéneos en los componentes. Se han utilizado modelos de daño y plasticidad, tanto con endurecimiento como con ablandamiento, para mostrar la versatilidad del enfoque propuesto.

Se han analizado tanto la rigidez como la resistencia del material compuesto en función de la fracción volumétrica de fibra y para cargas cuya orientación no coincide con la dirección de las fibras (*off-axis loading*). Se han obtenido las envolventes de fallo tanto para lámina como para laminados compuestos realizados con fibra de vidrio y matriz epoxi. Se ha verificado la rápida convergencia tanto del algoritmo interno del compuesto como del problema global. En todo el proceso de validación se han obtenidos resultados muy satisfactorios.

**c) Se ha desarrollado un módulo de preproceso para una definición ágil de sistemas de referencia locales de material para cada elemento de la malla, en función de la geometría del problema.**

El módulo desarrollado forma parte de una interfase gráfica de usuario, específica para materiales compuestos laminados, desarrollada a través del proyecto europeo COMPASS [1] y que permite vincular el pre y pos procesador GiD [2] con el código de cálculo FEM COMET [3].

Este trabajo, desarrollado conjuntamente con Gerardo Socorro (investigador de Quantech ATZ) en lenguaje Tcl-Tk, permite, mediante la escritura en el archivo de entrada de datos, definir la “orientación local” del material compuesto (laminado) para cada elemento finito respecto del sistema de referencia global. A partir de este sistema local elemental se definirán las orientaciones respectivas de las subcapas del laminado. Además, en correspondencia con el trabajo de preproceso, ha sido necesaria la modificación del programa FEM para que pueda almacenar y utilizar esta información indispensable durante el proceso de cálculo.

**d) Se han desarrollados elementos finitos “compuestos” sobre la base de elementos finitos más simples, tal como el sólido 3D isoparamétrico y el de tipo lámina DKT-CST.**

Para discretizar estructuras laminadas gruesas se emplean elementos 3D sólidos isoparamétricos. En cada punto de integración se emplea el modelo constitutivo propuesto para laminados. A esta asociación de elemento finito con modelo constitutivo compuesto se denominó “elemento finito compuesto”. El mapa de

memoria de estos tipos de elementos debe almacenar ahora todas las variables internas del compuesto para cada punto de integración.

Para discretizar estructuras laminadas delgadas se emplean elementos tipo lámina laminados. Se implementó y validó un elemento finito tipo lámina DKT-CST (que considera la hipótesis de Kirchhoff de manera discreta para el comportamiento a flexión y un estado de tensión constante para comportamiento membranar). Este procedimiento requirió además la adaptación del código COMET para la resolución de un nuevo tipo de problema: estructuras laminares. Esto incluyó modificaciones en la entrada de datos (geometría, condiciones de contorno de Newman y Dirichlet), mapa de memoria, salida de posproceso por puntos de integración (adaptadas a láminas), búsqueda de nodos coplanares y desactivación de grados de libertad correspondientes.

Se ha realizado el desarrollo, implementación y validación de un elemento de lámina discretizado en capas de compuesto, sobre la base del elemento DKT-CST más la adopción de una teoría de capa única equivalente para realizar la integración en la dirección normal del laminado.

**e) Se han realizado algunos ejemplos de aplicación para ilustrar algunas aplicaciones y potencialidades del enfoque propuesto.**

Se muestra la potencialidad del modelo compuesto propuesto para ser empleado en análisis de durabilidad de los materiales compuestos. Específicamente se estudia el comportamiento a fatiga. Para ello se propone una metodología de calibración de curvas de vida para materiales compuestos mediante ensayos experimentales. Un modelo de fatiga [4] basado en la mecánica de los medios continuos que considera las ecuaciones constitutivas de daño elasto-plástico, se ha aplicado a las fases componentes de materiales CFRP para obtener la durabilidad del laminado compuesto en su conjunto. La comparación entre las pruebas experimentales y numéricas realizadas en probetas de material permite afirmar que la metodología presentada aquí es muy prometedora para el análisis de la durabilidad de piezas estructurales de material compuesto.

Se ilustra también la capacidad del modelo para analizar el daño en componentes sometidos a ciclos de carga y descarga tanto a tracción como compresión.

Finalmente, se muestran ejemplos de aplicación empleando tanto elementos sólidos como lámina para discretizar geometrías de mayor complejidad.

## 8.2 Aportaciones científicas relevantes

Las aportaciones científicas de mayor relevancia generadas con este trabajo son:

1. Formulación, implementación y validación de un modelo numérico para laminados compuestos, capaz de simular adecuadamente el comportamiento no-lineal y el acoplamiento serie-paralelo de componentes con independencia del estado de cargas.
2. Formulación teórica e implementación computacional de un módulo de preproceso para una definición ágil de sistemas de referencia locales de material para cada elemento de la malla, en función de la geometría del problema. Adaptación del código COMET para permitir el tratamiento de orientaciones del material (sistemas de referencia locales) para cada elemento finito de la malla.
3. Proposición de una metodología de calibración de “curvas de vida” para el modelo mediante ensayos experimentales.
4. Desarrollo, implementación y validación de un elemento de lámina discretizado en capas de material compuesto. Adaptación del código COMET para la resolución de estructuras laminares. Esto incluye modificaciones en la entrada de datos (geometría, condiciones de contorno de Newman y Dirichlet), mapa de memoria, salida de posproceso por puntos de integración (adaptadas a láminas), búsqueda de nodos coplanares y desactivación de grados de libertad.

### 8.3 Valor metodológico y científico

La metodología de investigación empleada en el trabajo y la forma de estructurar y enfocar el estudio de los materiales laminados compuestos tiene un alto valor metodológico para afrontar futuras investigaciones, dado que no sólo es aplicable a matrices reforzadas con fibras largas, sino que permitiría ser extendida a otras tipologías de materiales compuestos, tales como matrices reforzadas con fibras cortas, o con partículas. Además, este método también puede ser utilizado para incluir tensiones y deformaciones residuales en la formulación.

Las aportaciones relevantes mencionadas en el apartado 8.2 poseen en sí mismas un gran valor científico. Además, el modelo para laminados compuestos que se propone sirve también de base para desarrollos futuros que permitirán el estudio de:

- ❑ grandes desplazamientos y deformaciones finitas,
- ❑ pandeo local de fibras,
- ❑ deslizamiento/despegue fibra-matriz,

- ❑ delaminación.

También permite el estudio termomecánico de los compuestos, si se emplean modelos constitutivos que tengan en cuenta el cambio en las propiedades mecánicas de los componentes originado por la temperatura.

## 8.4 Valor práctico-ingenieril

La implementación en un programa de elementos finitos del modelo para compuestos propuesto, junto con una interfaz de usuario apropiada para la definición de orientación del material constituyen una herramienta informática potente para el diseño de nuevos materiales y el estudio de variados problemas práctico-ingenieriles tales como:

- ❑ optimización de forma-espesor y de orientación de fibras en piezas estructurales,
- ❑ determinación del inicio de fallo y colapso total de estructuras,
- ❑ cálculo de coeficientes de seguridad,
- ❑ estudio de modos de vibración

realizados sobre estructuras de material compuesto.

Mediante la definición adecuada de modelos de degradación de los materiales componentes puede utilizarse esta herramienta en el estudio de la durabilidad en general de materiales compuestos incluyendo:

- ❑ fatiga,
- ❑ fluencia (*creep*),
- ❑ degradación medioambiental: exposición a la luz (rayos UV) y humedad.

La necesidad de la industria de la construcción de dar solución a problemas actuales, referentes a refuerzo y reparación estructural, muestra interés en el estudio, creación y aplicación de materiales nuevos en la construcción. Se pueden citar algunas aplicaciones en esta industria:

- ❑ refuerzos a cortante y flexión en la reparación de puentes de hormigón,
- ❑ refuerzo a compresión de columnas,
- ❑ diseño de pasarelas realizadas con perfiles compuestos pultrusionados [5],

- ❑ construcción de edificios industriales y de vivienda [6].

El sector aeroespacial demanda de forma permanente la utilización de nuevos materiales que disminuyan el peso de las estructuras y mejoren sus prestaciones en servicio. En los últimos años se ha producido un incremento significativo del empleo de materiales compuestos en las estructuras aeronáuticas y en las estructuras primarias de lanzadores y satélites. Todo indica que esta tendencia continuará en los próximos años. El estudio mecánico y de degradación ante condiciones extremas de estos materiales adquiere gran importancia.

Otras tantas aplicaciones pueden ser mencionadas en industrias como la energética, automotriz, náutica, etc.

- ❑ diseño de aerogeneradores,
- ❑ chasis y estructuras en automovilismo de competición, componentes en automovilismo de serie.
- ❑ diseño de barcos y yates,
- ❑ artículos de deporte: cañas de pescar, palos de golf, bicicletas, etc.
- ❑ Bio-ingeniería: prótesis ortopédicas, etc.

## 8.5 Futuras líneas de investigación

Al realizar la valoración metodológica, científica y práctico-ingenieril del trabajo en los apartados anteriores, se indicaron no sólo los campos de aplicación del trabajo sino que también surgieron los posibles desarrollos futuros que pueden derivarse del mismo. A continuación se mencionan algunas futuras líneas de investigación que pueden tener como punto de partida el presente trabajo, sugiriéndose algunos posibles caminos a seguir.

Pueden mencionarse los siguientes estudios futuros que son de aplicación inmediata, es decir que requieren poco o ningún desarrollo teórico, pero que sin embargo, facilitarían la simulación numérica de estructuras laminadas de material compuesto, dado que permitirán una mejor caracterización mecánica de los materiales componentes:

- ❑ Integrar el modelo propuesto con un modelo de fatiga mejorado en los componentes que pueda considerar diferentes umbrales para tracción y compresión como el propuesto por Mayugo [7] [8].

- ❑ Estudiar el fenómeno de fluencia en la matriz. Esto se puede realizar mediante el empleo de modelos viscosos combinados tanto con daño como con plasticidad.
- ❑ Estudiar fenómenos de degradación medioambiental en los componentes, como la exposición a luz (rayos UV) y a la humedad. Existen estudios experimentales que muestran el deterioro que sufren tanto la fibra como la matriz ante estos agentes externos. El estudio de éstos puede realizarse de manera similar al estudio de la fatiga mecánica o térmica mediante el empleo de curvas de degradación de la rigidez o resistencia en función del tiempo de exposición.
- ❑ Estudiar fenómenos térmicos. Dado que el modelo propuesto ha sido implementado en un código FEM que permite resolver problemas termomecánicos, sólo resta por definir de manera apropiada la evolución de las propiedades mecánicas de los componentes en función de la temperatura.
- ❑ Estudiar problemas estructurales con grandes desplazamientos. Para ello es necesario combinar el modelo constitutivo propuesto con elementos finitos cuya cinemática permita abordar este tipo de problemas.

Entre las líneas de investigación que requieren desarrollos teóricos en la temática de modelos constitutivos, se pueden sugerir las siguientes:

- ❑ Ampliar la formulación del modelo propuesto para tener en cuenta las deformaciones finitas. Debería considerarse que la morfología y orientación de fibras pueden ser diferentes en la configuración espacial respecto de la material.
- ❑ Estudiar otras tipologías de refuerzo: fibras cortas, partículas. Este trabajo implica una reformulación de las ecuaciones de cierre utilizadas en el modelo propuesto. Estas ecuaciones tendrían que considerar un comportamiento en serie en todas direcciones. Los parámetros de enriquecimiento también tendrían que ser redefinidos para considerar la nueva morfología y concentración de tensiones en función de la fracción volumétrica del refuerzo y de la relación entre rigideces de los componentes.
- ❑ Incorporar en la formulación el fenómeno del pandeo local de fibras. Para ello habría que redefinir las ecuaciones de cierre que deberán ser evolutivas dependiendo de las variables internas de los componentes dado que el daño en la matriz afecta el confinamiento de las fibras modificando su estabilidad local, y viceversa.

- ❑ Incorporar en la formulación el fenómeno de despegue fibra-matriz o daño en la interfase (*debonding*). Para ello habría que redefinir las ecuaciones de cierre que deberán incluir variables internas adicionales para simular la degradación de la interfase. También será necesario definir la evolución de estas variables de manera termodinámicamente consistente. Otra alternativa podría ser recurrir a una estrategia propuesta por Car [9] [10] en la cual el fenómeno de deslizamiento se transfiere al modelo constitutivo de la fibra en forma de deformaciones plásticas ficticias con el flujo plástico orientado en la dirección de la fibra.
- ❑ Analizar la posibilidad de emplear la metodología empleada para formular modelos numéricos para estudiar los entramados de fibras (*woven fibres*). La formulación de ecuaciones de cierre no será una tarea sencilla de realizar dado que las fibras no se encuentran rectas. El entrelazado existente provoca que al cargar las fibras en una dirección, se vean afectadas la matriz y las fibras orientadas en otras direcciones. Tal vez sea necesario recurrir a otras técnicas micro-macro dada la complejidad de la celda representativa.

Los trabajos futuros que requieren desarrollos teóricos en el campo de la tecnología de elementos finitos son:

- ❑ Combinar el modelo constitutivo propuesto con el desarrollo de nuevos elementos de lámina laminado que proporcionen una mejor descripción de la cinemática en la dirección normal para poder considerar mejor el cortante interlaminar, sobre todo en la modelización de estructuras laminadas gruesas. Se podrían considerar por ejemplo el empleo de teorías de lámina equivalente de orden superior, o incluso teorías de laminado más elaboradas que consideran el campo de desplazamientos capa por capa (ver Reddy [11]).
- ❑ Combinar el modelo constitutivo propuesto con elementos finitos capaces de reproducir el fenómeno de delaminación. Este fenómeno adquiere gran importancia en laminados compuestos sometidos a cargas tanto cuasi-estáticas como cíclicas y dinámicas, en sollicitaciones a flexión, compresión, impacto, etc.



## Referencias

- [1] Growth Project COMPASS (G5RD-CT-2001-00575): A Methodology for Durability Assessment of Composite Materials and Structures under Cyclic Loads.
- [2] GiD The personal pre & post processor. <http://gid.cimne.upc.es> [web home].
- [3] Cervera M.; Agelet C.; Chiumenti M. (2002). COMET: Coupled Mechanical and Thermal Analysis. Data input manual. *Technical Report CIMNE N° IT-308*. Barcelona.
- [4] Oller S, Salomon O, Oñate E. (2005). "A continuum mechanics model for mechanical fatigue análisis". *Computational Materials Science*. 32:175–195.
- [5] Pulido, M.D.G. & Sobrino, J.A. (2002). "Hacia la aplicación de los materiales compuestos en el diseño de pasarelas". En: "*Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*". Sergio Oller (Ed.). Barcelona: CIMNE. pp. 547-576.
- [6] Recasens Grau, J. (2004). "Nuevas aplicaciones de los materiales compuestos en la construcción". *Tecnología de los plásticos*. Año II, no. 2, pp. 39-44. Madrid: Alción.
- [7] Mayugo, JA. (2003). "*Estudio constitutivo de materiales compuestos laminados sometidos a cargas cíclicas*". Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. [Tesis doctoral].
- [8] Mayugo JA, Costa J, Blanco N, Oller S. (2002). "A constitutive model for the fatigue life prediction of composite materials based on continuum damage mechanics". In: *10th European Conference on Composite Materials*. Brugge (Belgium): European Society of Composite Materials (ESCM).
- [9] Car E. (2000). "*Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*". Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña. [Tesis doctoral].
- [10] Car E, Oller S, Oñate E. (2000). "*Tratamiento numérico de los materiales compuestos*". Monografía M57. Barcelona: CIMNE.
- [11] Reddy JN. (2004). "*Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*". 2nd edition. CRC Press, New York (USA).

## Apéndice: ELEMENTO LÁMINA DKT-CST

### A.1 Marco teórico e implementación

El elemento lámina que ha sido implementado en el código COMET es un elemento lámina plano de tres nodos, elástico lineal del tipo DKT (*Discrete Kirchhoff Triangle*) [1], [2], [3] para el comportamiento a flexión y CST (*Constant Stress Triangle*) para el membranal. Se utiliza un ensamblaje en ejes locales de los giros y una restricción de la rotación de *drilling* para evitar singularidades en los nodos coplanares [4].

#### A.1.1 Teoría estructural empleada

Para el comportamiento a flexión de placa delgada, el elemento de lámina plana que se va a desarrollar emplea una adecuada modificación de la teoría en pequeños desplazamientos de placas planas con deformación de cortante incluida [5]. Esta modificación consiste en introducir en la teoría de Reissner-Mindlin las hipótesis de Kirchhoff de manera discreta [6] con objeto de que la contribución debida a la energía de cortante tienda a cero al refinar la malla. Para el comportamiento de membrana se utiliza la teoría de la elasticidad bidimensional en pequeños desplazamientos [7].

Ya que el elemento es plano, los efectos de flexión y de membrana a nivel del elemento están desacoplados. Dicho desacoplamiento generalmente desaparece a

nivel global al ensamblar las contribuciones de los diversos elementos que se encuentran en distintos planos.

La cinemática se describe mediante 5 funciones definidas sobre la superficie de la lámina:

$u', v'$ : componentes de los desplazamientos en el plano de la lámina (asociadas al comportamiento de membrana)

$w', \beta_x', \beta_y'$ : componentes del desplazamiento ortogonal al plano de la lámina y rotaciones de la normal a la lámina (asociadas al comportamiento de placa).

### A.1.2 Descripción del elemento lámina

El elemento finito de lámina plana que se desarrolla es plano, triangular de tres nodos y tiene, localmente, 5 grados de libertad por nodo: las tres componentes del desplazamiento nodal y los giros alrededor de dos ejes contenidos en el plano del elemento.

A nivel global, por defecto, los parámetros cinemáticos de un mismo nodo son 6: un vector de desplazamientos y un vector de rotaciones. El vector de rotación global se relaciona de manera natural con los dos grados de libertad rotacionales del correspondiente nodo del elemento, es decir, su proyección en el plano del elemento es igual al vector de giros locales. Como se detallará más adelante, en el caso de nodos coplanares, este modo de relacionar grados de libertad (DOF) locales con DOF globales requiere un tratamiento particular para evitar la aparición de singularidades en la matriz de rigidez global.

#### a) Grados de libertad elementales

Para introducir los símbolos utilizados en este capítulo, indicamos con  $\underline{e}_1$ ,  $\underline{e}_2$  y  $\underline{e}_3$  los tres vectores unitarios de los tres ejes del sistema de referencia global cartesiano; con  $\underline{x}^{(e,1)}$ ,  $\underline{x}^{(e,2)}$  y  $\underline{x}^{(e,3)}$  los radios vectores de los nodos en correspondencia con los tres vértices del elemento triangular  $e$ ; con  $\underline{u}^{(e,1)}$ ,  $\underline{u}^{(e,2)}$  y  $\underline{u}^{(e,3)}$  sus respectivos desplazamientos y con  $\underline{e}'_1{}^{(e)}$ ,  $\underline{e}'_2{}^{(e)}$  y  $\underline{e}'_3{}^{(e)}$  tres vectores unitarios cartesianos locales elementales orientados de modo que el tercer eje sea ortogonal al plano del elemento.

El elemento implementado presenta tres nodos y 15 grados de libertad:

- tres desplazamientos por nodo

$$u'^{(e,j)} = \underline{u}^{(e,j)} \cdot \underline{e}_1'^{(e)}, \quad v'^{(e,j)} = \underline{u}^{(e,j)} \cdot \underline{e}_2'^{(e)}, \quad w'^{(e,j)} = \underline{u}^{(e,j)} \cdot \underline{e}_3'^{(e)}$$

- las dos derivadas del desplazamiento ortogonal  $w'$  en cada nodo  $j$  calculadas a lo largo de las direcciones de  $\underline{e}_1'^{(e)}$  y  $\underline{e}_2'^{(e)}$

$$w'_{,x'}^{(e,j)} = \left. \frac{\partial w'}{\partial x'} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^{(e,j)}}, \quad w'_{,y'}^{(e,j)} = \left. \frac{\partial w'}{\partial y'} \right|_{\underline{x}=\underline{x}^{(e,j)}}.$$

Por tanto, el vector de grados de libertad del elemento  $e$  se puede ordenar de la siguiente manera:

$$\left\{ \left( \begin{Bmatrix} u'^{(e,1)} \\ v'^{(e,1)} \\ w'^{(e,1)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} w'_{,x'}^{(e,1)} \\ w'_{,y'}^{(e,1)} \end{Bmatrix} \right), \left( \begin{Bmatrix} u'^{(e,2)} \\ v'^{(e,2)} \\ w'^{(e,2)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} w'_{,x'}^{(e,2)} \\ w'_{,y'}^{(e,2)} \end{Bmatrix} \right), \left( \begin{Bmatrix} u'^{(e,3)} \\ v'^{(e,3)} \\ w'^{(e,3)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} w'_{,x'}^{(e,3)} \\ w'_{,y'}^{(e,3)} \end{Bmatrix} \right) \right\} \quad (\text{A.1})$$

Naturalmente, los parámetros  $u'^{(e,i)}$  y  $v'^{(e,i)}$  afectarán al comportamiento de membrana, mientras que  $w'^{(e,i)}$ ,  $w'_{,x'}^{(e,i)}$  y  $w'_{,y'}^{(e,i)}$  al comportamiento a flexión.

#### b) Grados de libertad globales y gestión de la coplanaridad

A nivel global la cinemática está definida, en su caso más general, mediante seis grados de libertad por nodo  $k$ : es decir, que en cada nodo está definido un vector desplazamiento  $\underline{u}^{(k)}$  y un vector de giro  $\underline{g}^{(k)}$ .

Cuando todos los elementos que tienen un nodo en común pertenecen a un mismo plano (nodos coplanares), se presenta la dificultad de que la matriz de rigidez global se vuelva singular. Esto es debido al hecho de que no hay rigidez en correspondencia con una variación del giro ortogonal al plano de coplanaridad (*drilling rotation*).

El procedimiento que se utiliza para evitar dicha dificultad consiste en realizar un “ensamblaje selectivo en ejes locales”, es decir, en los nodos donde no hay problemas de coplanaridad se mantienen los seis grados de libertad (tres desplazamientos en coordenadas globales  $u_1^{(k)}$ ,  $u_2^{(k)}$ ,  $u_3^{(k)}$  y tres giros alrededor de tres ejes locales  $g_1^{(k)}$ ,  $g_2^{(k)}$ ,  $g_3^{(k)}$  definidos convenientemente para cada nodo). Por otro lado, en los nodos coplanares se toman solamente 5 grados de libertad, desactivándose el grado de libertad correspondiente a la rotación de *drilling*. Se consideran activos únicamente los dos giros alrededor de los ejes locales  $\underline{e}_1^{gk}$  y  $\underline{e}_2^{gk}$  pertenecientes al plano de coplanaridad. Las ecuaciones correspondientes a los tres desplazamientos se siguen ensamblando normalmente en ejes globales.

Resumiendo, los grados de libertad pertenecientes a un nodo  $k$  que no presenta problemas de coplanaridad son:

$$\left\{ \begin{Bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ u_3^{(k)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} g_1^{(k)} \\ g_2^{(k)} \\ g_3^{(k)} \end{Bmatrix} \right\} \quad \text{donde } u_i^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \cdot \underline{e}^i \text{ y } g_i^{(k)} = \underline{g}^{(k)} \cdot \underline{e}^{g_i};$$

mientras que para un nodo coplanar los 5 grados de libertad se escriben a continuación:

$$\left\{ \begin{Bmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ u_3^{(k)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} g_1^{(k)} \\ g_2^{(k)} \end{Bmatrix} \right\} \quad \text{donde } u_i^{(k)} = \underline{u}^{(k)} \cdot \underline{e}^i \text{ y } g_i^{(k)} = \underline{g}^{(k)} \cdot \underline{e}^{g_i}; \quad \underline{e}^{g_1}, \underline{e}^{g_2} \in \pi_{copl}.$$

### A.1.3 Elemento de placa DKT (Discrete Kirchhoff Triangle)

Antes de presentar el elemento DKT, y con el objetivo de introducir la notación utilizada a continuación, se resume brevemente la teoría de pequeños desplazamientos de placas con deformación cortante incluida [6], [8], empleada para la derivación de este elemento.

La cinemática base de la teoría de Reissner-Mindlin es una generalización de la hipótesis de Kirchhoff. El campo de desplazamientos puede expresarse de la siguiente manera:

$$u' = z\beta_{x'}(x', y') \quad ; \quad v' = z\beta_{y'}(x', y') \quad ; \quad w' = w'(x', y'), \quad (\text{A.2})$$

donde  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$  son las rotaciones de la normal al plano medio no-deformado, en los planos  $y'-z'$  y  $x'-z'$ , respectivamente.

Para un material isótropo la energía de deformación  $U$  puede descomponerse en la suma de un término debido a la flexión  $U_f$  y de otro debido al cortante  $U_c$ :

$$U = U_f + U_c \quad (\text{A.3})$$

$$U_f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \iint_A \left\{ \beta_{x',x'}^2 + \beta_{y',y'}^2 + 2\nu\beta_{x',x'}\beta_{y',y'} + \frac{1-\nu}{2}(\beta_{y',x'} + \beta_{x',y'})^2 \right\} dA \quad (\text{A.4})$$

$$U_c = k \frac{E}{4(1+\nu)} \iint_A \left\{ (w'_{,x'} - \beta_{x'})^2 + (w'_{,y'} - \beta_{y'})^2 \right\} dA \quad (\text{A.5})$$

donde  $E$  es el módulo de Young,  $\nu$  el coeficiente de Poisson y  $k$  el coeficiente de corrección para el corte que normalmente adopta el valor:  $k = \frac{5}{6}$ .

Esta expresión de la energía es válida para placas de cualquier espesor.

Para obtener el elemento de placa delgada DKT se deben imponer las condiciones de Kirchhoff de forma discreta introduciendo modificaciones en un elemento de placa de Reissner-Mindlin de forma triangular de 6 nodos. La convergencia hacia la solución clásica de placa delgada [9, 10] se obtiene al despreciar la energía debida al cortante y al imponer la hipótesis de Kirchhoff a lo largo de cada lado del triángulo:

$$\frac{\partial w'}{\partial s} - \beta_s = 0 \quad (A.6)$$

Despreciando la energía debida al cortante, el modelo de elemento DKT se basa únicamente en el funcional (A.4), por tanto, el trabajo virtual interno se puede expresar del siguiente modo:

$$\iint_{A^e} \delta \hat{\varepsilon}^T \hat{\sigma} dA = \iint_{A^e} \delta \hat{\varepsilon}_f^T \hat{D}_f \hat{\varepsilon}_f dA \quad (A.7)$$

$$\text{donde } \hat{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} -\beta_{x',x'} \\ -\beta_{y',y'} \\ -(\beta_{x',y'} + \beta_{y',x'}) \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{D}_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Esta ecuación contiene únicamente derivadas primeras de las rotaciones  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$ , resultando, por tanto, relativamente fácil elegir funciones de interpolación que satisfagan la conformidad. Además, es necesario relacionar las rotaciones  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$  con el desplazamiento  $w'$  que no aparece en la ecuación (A.4). Consecuentemente, para obtener la matriz de rigidez en coordenadas globales será necesario relacionar los parámetros locales con los globales.

#### a) Interpolación de la geometría

Se adopta una interpolación lineal de la geometría.

Indicando mediante  $\underline{x} = \{x, y, z\}$  y  $\underline{\xi} = \{\xi, \eta\}$  los vectores de coordenadas en el espacio cartesiano y natural, con  $\underline{x}_i, i=1,2,3$  las coordenadas del nodo  $i$  y con:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta ; \quad N_2 = \xi ; \quad N_3 = \eta \quad (A.8)$$

las tres funciones de formas lineales clásicas para elementos triangulares, se utiliza para la geometría la siguiente interpolación lineal :

$$\underline{x}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^3 \underline{x}_i N_i = \underline{x}_1 + (\underline{x}_2 - \underline{x}_1)\xi + (\underline{x}_3 - \underline{x}_1)\eta \quad (\text{A.9})$$

**b) Interpolación de las funciones incógnitas**

Considerado como elemento de placa, el DKT presenta 9 grados de libertad, es decir, el desplazamiento  $w^{(e,j)}$  y sus derivadas  $w_{,x'}^{(e,j)}$  y  $w_{,y'}^{(e,j)}$  en cada nodo esquina  $j$ ; por tanto, es necesario adoptar 9 funciones de forma para interpolar  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$ . El único requisito que se pide a estas funciones de forma es que garanticen una interpolación de clase  $C^0$ .

Para garantizar la conformidad de  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$  a través del lado  $i-j$  que comparten dos elementos vecinos se elige un conjunto de 9 funciones de forma de modo que el valor que adoptan a lo largo del lado dependa únicamente del valor de las variables pertenecientes al mismo lado. Esto se consigue adoptando como funciones de forma las tres funciones de forma lineales para el triángulo y otras tres funciones jerárquicas que se describirán a continuación.

Utilizando las funciones de forma lineales para el triángulo (A.8) se originan los términos:

$$\begin{Bmatrix} \beta_{x'} \\ \beta_{y'} \end{Bmatrix} = N_1 \begin{Bmatrix} \beta_{x'1} \\ \beta_{y'1} \end{Bmatrix} + N_2 \begin{Bmatrix} \beta_{x'2} \\ \beta_{y'2} \end{Bmatrix} + N_3 \begin{Bmatrix} \beta_{x'3} \\ \beta_{y'3} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

La linealidad de estos primeros 6 términos garantiza que la restricción de las funciones  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$  a lo largo del lado  $i-j$  quede definida unívocamente en correspondencia con los valores nodales tomados en los extremos  $i$  y  $j$ , verificándose la continuidad a través del lado  $i-j$  para todos los elementos que comparten el mismo.

Para agregar otras tres funciones de forma conformes a través del lado  $i-j$  y alcanzar el número de 9 se añaden los términos:

$$N_4 \underline{e}_{23} \beta_{23}, \quad N_5 \underline{e}_{13} \beta_{13}, \quad N_6 \underline{e}_{12} \beta_{12} \quad (\text{A.11})$$

donde  $N_4, N_5, N_6$  son las funciones cuadráticas de las coordenadas naturales:

$$N_4 = 4\xi\eta, \quad N_5 = 4\eta(1-\xi-\eta), \quad N_6 = 4\xi(1-\xi-\eta) \quad (\text{A.12})$$

y  $\underline{e}_{12}$ ,  $\underline{e}_{23}$ ,  $\underline{e}_{13}$  son los vectores unitarios de los lados:

$$\underline{e}_{12} = \frac{\underline{x}_2 - \underline{x}_1}{\|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\|} ; \quad \underline{e}_{23} = \frac{\underline{x}_3 - \underline{x}_2}{\|\underline{x}_3 - \underline{x}_2\|} ; \quad \underline{e}_{13} = \frac{\underline{x}_3 - \underline{x}_1}{\|\underline{x}_3 - \underline{x}_1\|} \quad (\text{A.13})$$

Es importante observar que cada uno de los términos vectoriales  $N_k \underline{e}_{ij} \beta_{ij}$  garantiza la continuidad a través del lado  $i$ - $j$  ya que los valores que toman dependen únicamente de las coordenadas de los extremos del mismo lado. El parámetro  $\beta_{ij}$  se puede interpretar como el módulo del valor que esta función vectorial adopta en el punto medio de dicho lado.

La interpolación final para  $\underline{\beta}$  en función de los parámetros  $\{\beta_{x'1}, \beta_{y'1}, \beta_{x'2}, \beta_{y'2}, \beta_{x'3}, \beta_{y'3}, \beta_{23}, \beta_{13}, \beta_{12}\}$  adopta la expresión:

$$\underline{\beta} = N_1 \underline{\beta}_1 + N_2 \underline{\beta}_2 + N_3 \underline{\beta}_3 + N_4 \underline{e}_{23} \beta_{23} + N_5 \underline{e}_{13} \beta_{13} + N_6 \underline{e}_{12} \beta_{12} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{donde } \underline{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_{x'} \\ \beta_{y'} \end{Bmatrix} ; \quad \underline{\beta}_i = \begin{Bmatrix} \beta_{x'i} \\ \beta_{y'i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_{x'}(\underline{x}_i) \\ \beta_{y'}(\underline{x}_i) \end{Bmatrix} .$$

De forma más explícita la interpolación (A.14) se puede escribir también:

$$\underline{\beta} = \begin{Bmatrix} \beta_{x'} \\ \beta_{y'} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x'}^k \\ \beta_{y'}^k \end{Bmatrix} + \sum_{k=4}^6 \begin{bmatrix} N_{ij(k)} (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) \\ N_{ij(k)} (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \end{bmatrix} \beta_{ij(k)} \quad (\text{A.15})$$

Por tanto el término de deformaciones  $\hat{\varepsilon}_f$  que aparece en la ecuación (A.7) toma la expresión:



$$\begin{aligned}
-\hat{\varepsilon}_f &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x'} \\ \beta_{y'} \end{Bmatrix} = \\
&= \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x'}^k \\ \beta_{y'}^k \end{Bmatrix} + \sum_{k=4}^6 \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{ij(k)}(\underline{e}_{ij(k)} \cdot \underline{e}'_1) \\ N_{ij(k)}(\underline{e}_{ij(k)} \cdot \underline{e}'_2) \end{bmatrix} \beta_{ij(k)} = \\
&= \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y'} & \frac{\partial N_k}{\partial x'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{x'}^k \\ \beta_{y'}^k \end{Bmatrix} + \sum_{k=4}^6 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial x'}(\underline{e}_{ij(k)} \cdot \underline{e}'_1) \\ \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial y'}(\underline{e}_{ij(k)} \cdot \underline{e}'_2) \\ \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial y'}(\underline{e}_{ij(k)} \cdot \underline{e}'_1) + \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial x'}(\underline{e}_{ij(k)} \cdot \underline{e}'_2) \end{bmatrix} \beta_{ij(k)} \quad (A.16)
\end{aligned}$$

c) *Imposición de la condición de Kirchhoff*

El conjunto  $B$  de 9 parámetros de interpolación de las funciones  $\beta_{x'}$  y  $\beta_{y'}$ :

$$B = \{\beta_{x'1}, \beta_{y'1}, \beta_{x'2}, \beta_{y'2}, \beta_{x'3}, \beta_{y'3}, \beta_{23}, \beta_{13}, \beta_{12}\} \quad (A.17)$$

se pone, oportunamente, en relación con el conjunto  $F$  de 9 parámetros locales que gobiernan el comportamiento flexional:

$$F = \left\{ \left( w^{(e,1)}, w_{,x'}^{(e,1)}, w_{,y'}^{(e,1)} \right), \left( w^{(e,2)}, w_{,x'}^{(e,2)}, w_{,y'}^{(e,2)} \right), \left( w^{(e,3)}, w_{,x'}^{(e,3)}, w_{,y'}^{(e,3)} \right) \right\} \quad (A.18)$$

mediante el cumplimiento de la condición de Kirchhoff impuesta lo largo del perímetro del triángulo:

$$\frac{\partial w'}{\partial s} - \beta_s = 0 \quad (A.19)$$

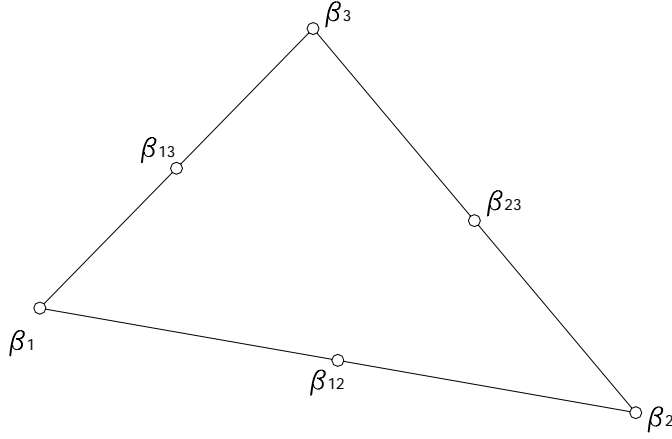


Figura A.1 – Esquema de los parámetros de interpolación del elemento inicial.

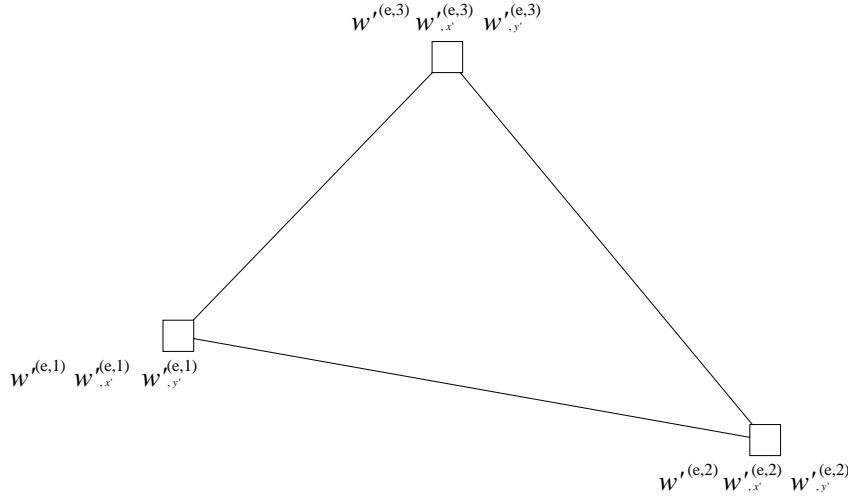


Figura A.2 – Esquema de los parámetros de interpolación del elemento DKT final.

donde  $s$  es la abscisa curvilínea del lado.

Esta condición se impone de manera sencilla suponiendo desplazamientos cúbicos a lo largo de los lados. Con esta hipótesis  $\frac{\partial w'}{\partial s}$  es cuadrático y, por tanto, es suficiente imponer la ecuación (A.19) en tres puntos por lado para garantizar el cumplimiento de la misma a lo largo de toda su longitud. De forma natural, los puntos que se eligen son las dos extremidades y el punto medio del lado  $ij$ .

Por tanto, se impone lo siguiente para cada lado  $ij$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\beta}(x_i) \cdot \underline{e}_{ij} = (\text{grad } w')_i \cdot \underline{e}_{ij} & \text{Punto } i \\ \underline{\beta}(x_j) \cdot \underline{e}_{ij} = (\text{grad } w')_j \cdot \underline{e}_{ij} & \text{Punto } j \\ \underline{\beta}(x_{ij}^m) \cdot \underline{e}_{ij} = (w'_{,s})^{ij} & \text{Punto medio } ij \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} i, j = 1, 2, 3 \\ ij = 12, 23, 13 \end{array} \quad (\text{A.20})$$

donde se indica con  $\underline{x}_{ij}^m$  el punto medio del lado  $ij$ , con  $(w'_{,s})^{ij}$  la derivada direccional en el punto calculada en  $\underline{x}_{ij}^m$  a lo largo de la dirección del lado y con  $(\text{grad } w')_i$  el vector  $\begin{Bmatrix} w'_{,x'}^{(e,i)} \\ w'_{,y'}^{(e,i)} \end{Bmatrix}$ .

Empleando la interpolación (A.14) se puede reescribir la expresión anterior en función de los parámetros de la interpolación:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\beta}_i \cdot \underline{e}_{ij} = (\text{grad } w')_i \cdot \underline{e}_{ij} & \text{Punto i} \\ \underline{\beta}_j \cdot \underline{e}_{ij} = (\text{grad } w')_j \cdot \underline{e}_{ij} & \text{Punto j} \\ \frac{1}{2} \underline{\beta}_i \cdot \underline{e}_{ij} + \frac{1}{2} \underline{\beta}_j \cdot \underline{e}_{ij} + \beta_{ij} = (w'_{,s})^{ij} & \text{Punto medio ij} \end{array} \right\} \begin{array}{l} i, j = 1, 2, 3 \\ \\ ij = 12, 23, 13 \end{array} \quad (\text{A.21})$$

de donde se desprende:

$$\beta_{ij} = (w'_{,s})^{ij} - \frac{1}{2} \text{grad } w'(\underline{x}_i) \cdot \underline{e}_{ij} - \frac{1}{2} \text{grad } w'(\underline{x}_j) \cdot \underline{e}_{ij} \quad (\text{A.22})$$

Puesto que  $w'$  varía cúbicamente a lo largo de ese lado,  $(w'_{,s})^{ij}$  puede expresarse en función de los valores que toman  $w'$  y  $w'_{,s}$  en los extremos  $i$  y  $j$ :  $w'_i, w'_j, (w'_{,s})_i, (w'_{,s})_j$  lo que se puede conseguir de manera sencilla.

Para determinar las incógnitas  $a, b, c, d$  del polinomio cúbico  $w'(s)$ :

$$w'(s) = a + bs + cs^2 + ds^3 \quad (\text{A.23})$$

se resuelve el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l_{ij} & l_{ij}^2 & l_{ij}^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2l_{ij} & 3l_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w'_i \\ w'_j \\ (w'_{,s})_i \\ (w'_{,s})_j \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

La solución del sistema (A.24) se substituye en la expresión siguiente:

$$(w'_{,s})^{ij} = w'_{,s} \left( \frac{l_{ij}}{2} \right) = b + cl_{ij} + \frac{3}{4} dl_{ij}^2 \quad (\text{A.25})$$

y, teniendo en cuenta que  $(w'_{,s})_i = \text{grad } w'(\underline{x}_i) \cdot \underline{e}_{ij}$  y  $(w'_{,s})_j = \text{grad } w'(\underline{x}_j) \cdot \underline{e}_{ij}$ , se obtiene finalmente la expresión:

$$(w'_{,s})^{ij} = -\frac{3}{2l_{ij}} w'_i + \frac{3}{2l_{ij}} w'_j - \frac{1}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_i) \bullet \underline{e}_{ij} - \frac{1}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_j) \bullet \underline{e}_{ij} . \quad (\text{A.26})$$

Substituyendo en (A.22) se deduce la expresión de los parámetros  $\underline{B}$  en función de los parámetros  $\underline{F}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{ij(k)} = -\frac{3}{2l_{ij(k)}} w'_{i(k,1)} + \frac{3}{2l_{ij(k)}} w'_{j(k,2)} - \frac{3}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_{i(k,1)}) \bullet \underline{e}_{ij(k)} - \frac{3}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_{j(k,2)}) \bullet \underline{e}_{ij(k)} \quad k=1,2,3 \\ \underline{\beta}_i = \text{grad } w'(\underline{x}_i) = \left\{ \begin{array}{l} w'_{,x'}(e,i) \\ w'_{,y'}(e,i) \end{array} \right\} \quad i=1,2,3 \end{array} \right. \quad (\text{A.27})$$

A través de (A.27) se puede expresar la interpolación de  $\underline{\beta}$  y de las deformaciones  $\hat{\underline{\epsilon}}_f$  en función de los parámetros  $\underline{F}$ , resultando las ecuaciones que se indican a continuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{x'} \\ \beta_{y'} \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} w'_{,x'}(e,k) \\ w'_{,y'}(e,k) \end{array} \right\} + \sum_{k=4}^6 \begin{bmatrix} N_{ij(k)}(\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) \\ N_{ij(k)}(\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \end{bmatrix} \left( -\frac{3}{2l_{ij(k)}} w'_{i(k,1)} + \frac{3}{2l_{ij(k)}} w'_{j(k,2)} - \frac{3}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_{i(k,1)}) \bullet \underline{e}_{ij(k)} - \frac{3}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_{j(k,2)}) \bullet \underline{e}_{ij(k)} \right) \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} -\hat{\underline{\epsilon}}_f = & \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y'} & \frac{\partial N_k}{\partial x'} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} w'_{,x'}(e,k) \\ w'_{,y'}(e,k) \end{array} \right\} + \\ & + \sum_{k=4}^6 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial x'}(\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) \\ \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial y'}(\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \\ \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial y'}(\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) + \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial x'}(\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \end{bmatrix} \left( \begin{array}{l} -\frac{3}{2l_{ij(k)}} w'_{i(k,1)} + \\ + \frac{3}{2l_{ij(k)}} w'_{j(k,2)} + \\ -\frac{3}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_{i(k,1)}) \bullet \underline{e}_{ij(k)} + \\ -\frac{3}{4} \text{grad } w'(\underline{x}_{j(k,2)}) \bullet \underline{e}_{ij(k)} \end{array} \right) \quad (\text{A.29}) \end{aligned}$$

d) *Matriz de interpolación de las deformaciones del elemento DKT en función de las variables globales*

El conjunto de parámetros cinemáticos globales de los nodos a los que se conecta el elemento  $e$  se indica con  $\mathcal{G}^{(e)}$  y, en el caso más general, contiene 18 parámetros. Este vector se ordena del siguiente modo:

$$\mathbf{G}^{(e)} = \left\{ \left( \begin{Bmatrix} u_1^{k(e,1)} \\ u_2^{k(e,1)} \\ u_3^{k(e,1)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} g_1^{k(e,1)} \\ g_2^{k(e,1)} \\ g_3^{k(e,1)} \end{Bmatrix} \right), \left( \begin{Bmatrix} u_1^{k(e,2)} \\ u_2^{k(e,2)} \\ u_3^{k(e,2)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} g_1^{k(e,2)} \\ g_2^{k(e,2)} \\ g_3^{k(e,2)} \end{Bmatrix} \right), \left( \begin{Bmatrix} u_1^{k(e,3)} \\ u_2^{k(e,3)} \\ u_3^{k(e,3)} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} g_1^{k(e,3)} \\ g_2^{k(e,3)} \\ g_3^{k(e,3)} \end{Bmatrix} \right) \right\}, \quad (\text{A.30})$$

siendo  $k(e, j)$  el índice en numeración global del nodo  $k$  al que se conecta el vértice  $j$  del elemento  $e$ .

En este punto es necesario escribir explícitamente la relación entre los términos de rotaciones y desplazamientos pertenecientes al conjunto de parámetros  $F$  con los respectivos términos del conjunto  $\mathbf{G}^{(e)}$  de parámetros cinemáticos globales (de los nodos a los que se conecta el elemento  $e$ ).

□ Rotaciones:

$$\text{grad } w'(\underline{x}_k) = \underline{e}'_3 \times \underline{g}_k.$$

En componentes se obtiene:

$$\text{grad } w'(\underline{x}_k) \cdot \underline{e}'_i = \underline{\beta}_k \cdot \underline{e}'_i = \underline{e}'_3 \times \underline{g}_k \cdot \underline{e}'_i = \underline{e}'_i \times \underline{e}'_3 \cdot \underline{g}_k = \underline{e}'_i \times \underline{e}'_3 \cdot \sum_{j=1}^3 g_{kj} \underline{e}_j^{gk}.$$

La relación precedente puede escribirse en forma de vector columna:

$$\begin{Bmatrix} w'_{,x'}^{(k)} \\ w'_{,y'}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\sum_{j=1}^3 g_{kj} \underline{e}_j^{gk} \cdot \underline{e}'_2 \\ \sum_{j=1}^3 g_{kj} \underline{e}_j^{gk} \cdot \underline{e}'_1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

□ Desplazamientos:

$$w'_k = \underline{u}^{(k)} \cdot \underline{e}'_3 = \sum_{i=1}^3 u_i^{(k)} \underline{e}_i \cdot \underline{e}'_3 \quad (\text{A.32})$$

Las expresiones (A.31) y (A.32) constituyen la relación buscada entre los parámetros  $F$  y  $\mathbf{G}^{(e)}$ .

Substituyendo (A.31) y (A.32) en la primera de las ecuaciones (A.27) se obtiene la expresión de  $\beta_{ij(k)}$  en función de los parámetros globales:

$$\begin{aligned} \beta_{ij(k)} = & -\frac{3}{2l_{ij(k)}} \sum_{r=1}^3 (u_r^{i(k,1)} \underline{e}_r \bullet \underline{e}'_3) + \frac{3}{2l_{ij(k)}} \sum_{r=1}^3 (u_r^{j(k,2)} \underline{e}_r \bullet \underline{e}'_3) + \\ & -\frac{3}{4} \left[ \left( -\sum_{r=1}^3 g_{i(k,1)r} \underline{e}_r^{g_{i(k,1)}} \bullet \underline{e}'_2 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) + \left( \sum_{r=1}^3 g_{i(k,1)r} \underline{e}_r^{g_{i(k,1)}} \bullet \underline{e}'_1 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \right] + \\ & -\frac{3}{4} \left[ \left( -\sum_{r=1}^3 g_{j(k,2)r} \underline{e}_r^{g_{j(k,2)}} \bullet \underline{e}'_2 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) + \left( \sum_{r=1}^3 g_{j(k,2)r} \underline{e}_r^{g_{j(k,2)}} \bullet \underline{e}'_1 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Utilizando (A.31) y (A.33), desde (A.29) se obtiene finalmente la expresión de la interpolación de las deformaciones  $\hat{\varepsilon}_f$  en función de los parámetros cinemáticos globales:

$$\begin{aligned} -\hat{\varepsilon}_f = & \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y'} \\ \frac{\partial N_k}{\partial y'} & \frac{\partial N_k}{\partial x'} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -\sum_{j=1}^3 g_{kj} \underline{e}_j^{g_k} \bullet \underline{e}'_2 \\ \sum_{j=1}^3 g_{kj} \underline{e}_j^{g_k} \bullet \underline{e}'_1 \end{array} \right\} + \\ & + \sum_{k=4}^6 \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial x'} (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) \\ \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial y'} (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \\ \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial y'} (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) + \frac{\partial N_{ij(k)}}{\partial x'} (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{l} -\frac{3}{2l_{ij(k)}} \sum_{r=1}^3 (u_r^{i(k,1)} \underline{e}_r \bullet \underline{e}'_3) + \frac{3}{2l_{ij(k)}} \sum_{r=1}^3 (u_r^{j(k,2)} \underline{e}_r \bullet \underline{e}'_3) + \\ -\frac{3}{4} \left[ \left( -\sum_{r=1}^3 g_{i(k,1)r} \underline{e}_r^{g_{i(k,1)}} \bullet \underline{e}'_2 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) + \left( \sum_{r=1}^3 g_{i(k,1)r} \underline{e}_r^{g_{i(k,1)}} \bullet \underline{e}'_1 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \right] + \\ -\frac{3}{4} \left[ \left( -\sum_{r=1}^3 g_{j(k,2)r} \underline{e}_r^{g_{j(k,2)}} \bullet \underline{e}'_2 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_1) + \left( \sum_{r=1}^3 g_{j(k,2)r} \underline{e}_r^{g_{j(k,2)}} \bullet \underline{e}'_1 \right) (\underline{e}_{ij(k)} \bullet \underline{e}'_2) \right] \end{array} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

Para los desarrollos que conducen a la obtención de la matriz de rigidez elemental normalmente se expresan las deformaciones de flexión en la siguiente forma matricial característica:

$$\hat{\varepsilon}_f = B_{flex}^{(e)} \{ \mathcal{G}^{(e)} \},$$

donde  $B_{flex}^{(e)}$  es la matriz, de tamaño 3x18, que define la interpolación de las deformaciones del elemento DKT en función de las variables globales que afectan el elemento.

La ecuación (A.34) constituye la fórmula operativa para el cálculo de  $B_{flex}^{(e)}$ .

#### A.1.4 Elemento de placa CST (*Constant Stress Triangle*)

Siendo más sencilla la obtención del elemento de membrana CST, se proporcionará directamente la expresión final de la matriz de interpolación de las deformaciones.

##### a) *Matriz de interpolación de las deformaciones del elemento CST en función de las variables globales*

La interpolación para los desplazamientos en parámetros locales resulta:

$$\begin{Bmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{x'}^{(i)} \\ u_{y'}^{(i)} \end{Bmatrix}, \quad \text{donde: } u_{x'}^{(i)} = \underline{u}^{(i)} \cdot \underline{e}'_1 \quad ; \quad u_{y'}^{(i)} = \underline{u}^{(i)} \cdot \underline{e}'_2.$$

Las deformaciones de membrana se expresan, en función de los parámetros globales, de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{bmatrix} \sum_{i=1}^3 \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^3 (\underline{e}_r \cdot \underline{e}'_1) u_r^{(i)} \\ \sum_{r=1}^3 (\underline{e}_r \cdot \underline{e}'_2) u_r^{(i)} \end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial N_i}{\partial x'} (\underline{e}_r \cdot \underline{e}'_1) \right) u_r^{(i)} \\ \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial N_i}{\partial y'} (\underline{e}_r \cdot \underline{e}'_2) \right) u_r^{(i)} \\ \sum_{r=1}^3 \left( \frac{\partial N_i}{\partial y'} (\underline{e}_r \cdot \underline{e}'_1) + \frac{\partial N_i}{\partial x'} (\underline{e}_r \cdot \underline{e}'_2) \right) u_r^{(i)} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

del mismo modo que en las deformaciones de flexión, las deformaciones de membrana se expresan en la siguiente forma matricial:

$$\hat{\varepsilon}_m = B_{mem.}^{(e)} \{G^{(e)}\}, \quad (\text{A.36})$$

donde  $B_{mem.}^{(e)}$  es la matriz, de tamaño 3x18, que define la interpolación de las deformaciones de membrana para el elemento CST en función de las variables globales que afectan el mismo.

La ecuación (A.35) constituye la fórmula operativa para el cálculo de  $B_{mem.}^{(e)}$ .

### A.1.5 Matriz de rigidez elemental en coordenadas globales

Obtendremos seguidamente la matriz de rigidez elástica  $K^{(e)}$  del elemento  $e$  referida a las coordenadas globales  $G^{(e)}$ .

Indicando con  $h$  el espesor de la lámina, las matrices elásticas constitutivas del comportamiento de membrana,  $\hat{D}_m$ , y a flexión,  $\hat{D}_f$ , se escriben:

$$\hat{D}_m = h \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_f = \frac{h^2}{12} \hat{D}_m. \quad (\text{A.37})$$

Siendo ortogonales la energía de membrana y de flexión a nivel de elemento, es decir, siendo el comportamiento membranar y el flexional independientes,  $K^{(e)}$  puede expresarse como la suma de las matrices de rigidez globales del problema a flexión,  $K_{flex.}^{(e)}$ , y de membrana,  $K_{mem.}^{(e)}$ , calculadas independientemente.

$$K^{(e)} = K_{mem.}^{(e)} + K_{flex.}^{(e)} \quad (\text{A.38})$$

$$K_{flex.}^{(e)} = \int_{A^e} B_{flex.}^T \hat{D}_f B_{flex.} dA \quad ; \quad K_{mem.}^{(e)} = \int_{A^e} B_{mem.}^T \hat{D}_m B_{mem.} dA. \quad (\text{A.39})$$

Las integrales de superficie se calculan a través de una integración numérica:

$$K_{flex.}^{(e)} \simeq \sum_{G=1}^{n_G} \left( B_{flex.}^T \hat{D}_f B_{flex.} \right) (\xi_G) W_G \quad , \quad K_{mem.}^{(e)} \simeq \sum_{G=1}^{n_G} \left( B_{mem.}^T \hat{D}_m B_{mem.} \right) (\xi_G) W_G. \quad (\text{A.40})$$



## Referencias

- [1] Dhatt G. (1970). "An efficient triangular shell element". *AIAA Journal*. 8:2100-2102.
- [2] Dhatt G. (1969). "Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis". *Proceedings of the ASCE Symposium, Civil Engineering*, Vanderbilt Univ., Nashville, Tenn., 255-258.
- [3] Stricklin JA, Haisler W, Tisdale P, Gunderson R. (1969). "A rapidly converging triangular plate element". *AIAA Journal*. 7:180-181.
- [4] Cook RD, Malkus DS, Plesha ME. (1989). "Concepts and applications of finite element analysis". 3rd ed., Wiley.
- [5] Washizu K. (1975). "Variational methods in elasticity and plasticity", 2nd ed., Pergamon Press, Oxford.
- [6] Batoz JL, Bathe KL, Ho LW. (1980). "A study of three node triangular plate-bending elements". *Int. J. for Num. Meth. in Engng*. 15:1771-1812.
- [7] Timoshenko S, Goodier JN. (1968). "Teoría de la elasticidad". Bilbao: Urmo.
- [8] Batoz JL. (1982). "An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element". *Int. J. for Num. Meth. in Engng*. 18:1077-1089.
- [9] Fried I, Yang SK. (1973). "Triangular, nine-degrees-of-freedom, C0 plate bending element of quadratic accuracy". *Quart. Appl. Math.*, 31(3):303-312.
- [10] Kikuchi F. (1975), "On a finite element scheme based on the discrete Kirchhoff assumption". *Num. Math.*, 24:211-231.